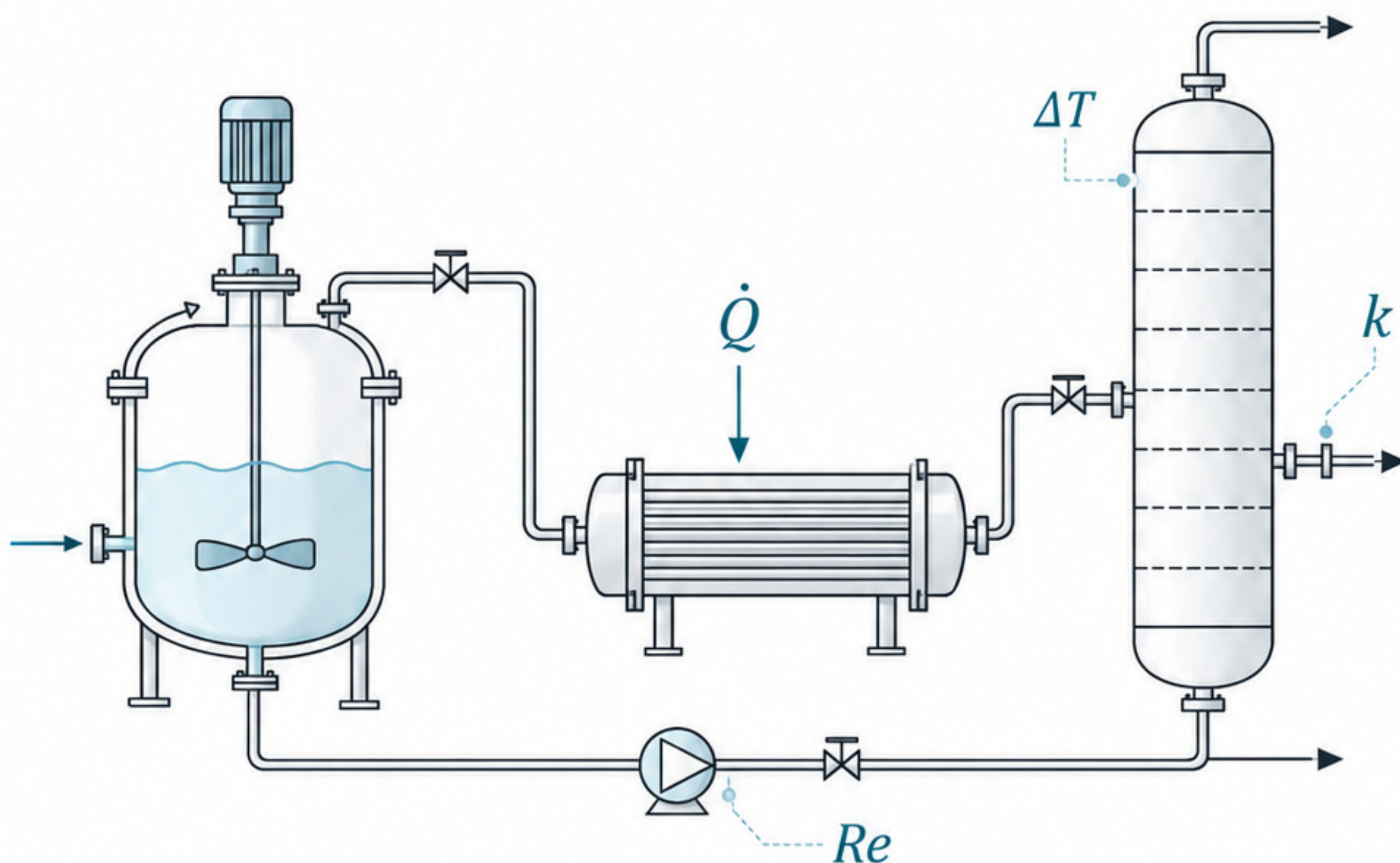


Mapa najważniejszych wzorów inżynierii chemicznej

Najważniejsze równania, symbole i zależności w jednym miejscu — do szybkiej nauki, powtórki i rozwiązywania zadań.



01

Informacje o materiale

Mapa najważniejszych wzorów inżynierii chemicznej

© 2026. Wszelkie prawa zastrzeżone.



Niniejszy materiał jest przeznaczony wyłącznie do celów edukacyjnych i indywidualnej nauki. Zabronione jest kopiowanie, odsprzedawanie, publiczne udostępnianie lub rozpowszechnianie całości bądź fragmentów materiału bez odpowiedniej zgody właściciela praw.

Mapa stanowi materiał wspierający naukę. Nie zastępuje podręcznika, wykładu, instrukcji laboratoryjnej ani szczegółowej dokumentacji technicznej.

W inżynierii chemicznej postać równania może zależeć od przyjętych założeń, właściwości układu oraz stosowanego modelu. Przed wykonaniem obliczeń zawsze należy sprawdzić założenia, jednostki i zakres stosowalności wzoru.



NAJWAŻNIEJSZE

**Najpierw sprawdź założenia i jednostki —
dopiero potem podstawiaj wartości do wzoru.**

02

Spis treści

Szybko znajdź potrzebny temat i przejdź do odpowiedniej strony.



START

03 | Jak korzystać z mapy wzorów

01 FUNDAMENTY OBLICZEŃ I BILANSE



- 04** Start modułu
- 05** Wielkości, symbole i podstawowe zależności
- 06** Skład mieszanin i stężenia
- 07** Ogólny bilans masy
- 08** Bilans składnika i reakcja chemiczna
- 09** Ogólny bilans energii
- 10** Bilans energii w typowych procesach

02 PRZEPŁYW PŁYNÓW



- 11** Start modułu
- 12** Równanie ciągłości
- 13** Równanie Bernoulliego
- 14** Liczba Reynoldsa
- 15** Straty ciśnienia
- 16** Złoża porowate
- 17** Pompy i moc

03 WYMIANA CIEPŁA



- 18** Start modułu
- 19** Ciepło i moc cieplna
- 20** Przewodzenie
- 21** Konwekcja
- 22** Współczynnik U
- 23** ΔT_{lm}
- 24** Metoda $\varepsilon-NTU$

04 WYMIANA MASY I ROZDZIELANIE



- 25** Start modułu
- 26** Prawo Ficka
- 27** Strumień i współczynniki
- 28** Liczby bezwymiarowe
- 29** Absorpcja
- 30** Destylacja
- 31** Ekstrakcja

05 TERMODYNAMIKA



- 32** Start modułu
- 33** Gaz doskonały
- 34** Pierwsza zasada
- 35** Raoult i Henry
- 36** Entalpia i C_p
- 37** Gibbs i równowaga
- 38** Ciśnienie pary

06 KINETYKA I REAKTORY



- 39** Start modułu
- 40** Kinetyka i Arrhenius
- 41** Konwersja, wydajność, selektywność
- 42** BATCH
- 43** CSTR
- 44** PFR

07 OPERACJE JEDNOSTKOWE I MASTER MAP



- | | | | |
|-----------|--------------|-----------|--------------------------|
| 45 | Start modułu | 48 | Mieszanie i podobieństwo |
| 46 | Sedymentacja | 49 | MASTER MAP |
| 47 | Filtracja | | |

03

Nie ucz się wzorów na pamięć bez kontekstu

Ta mapa została zaprojektowana po to, aby szybko prowadzić Cię od problemu do właściwego równania. Nie chodzi tylko o znalezienie wzoru – równie ważne jest rozpoznanie, kiedy można go użyć i co oznaczają występujące w nim wielkości.

5 kroków do właściwego wzoru



Zapamiętaj

Wzór jest modelem rzeczywistości. Jeśli założenia modelu nie odpowiadają analizowanemu procesowi, poprawne podstawienie liczb nie gwarantuje poprawnego wyniku.

System ikon używany w całym materiale:



wzór = główne równanie



kiedy stosować



ograniczenie lub typowy błąd



jednostki



interpretacja fizyczna



szybka kontrola wyniku

01

Fundamenty obliczeń i bilanse

Zanim policzysz proces, ustal co wchodzi, co wychodzi i co dzieje się wewnątrz układu.



$$\text{AKUMULACJA} = \text{WEJŚCIE} - \text{WYJŚCIE} + \text{POWSTAWANIE} - \text{ZUŻYCIE}$$

Cel modułu

Zebrać najbardziej podstawowe zależności wykorzystywane później w praktycznie wszystkich działach inżynierii chemicznej.

 $\mathcal{X}$

wielkości i symbole



skład mieszaniny

 Σ

bilans całkowity



bilans składnika



reakcja chemiczna



bilans energii

05

Najpierw określ, co właściwie liczysz

Podstawowe zależności między masą, liczbą moli, objętością, gęstością i strumieniami.

01 Masa i liczba moli

WZÓR

$$n = \frac{m}{M} \quad | \quad m = nM$$

CO OZNACZA

Zależność między masą substancji, liczbą moli i masą molową.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

n	— liczba moli	[mol]
m	— masa	[kg] lub [g]
M	— masa molowa	[kg/mol] lub [g/mol]

KIEDY STOSOWAĆ

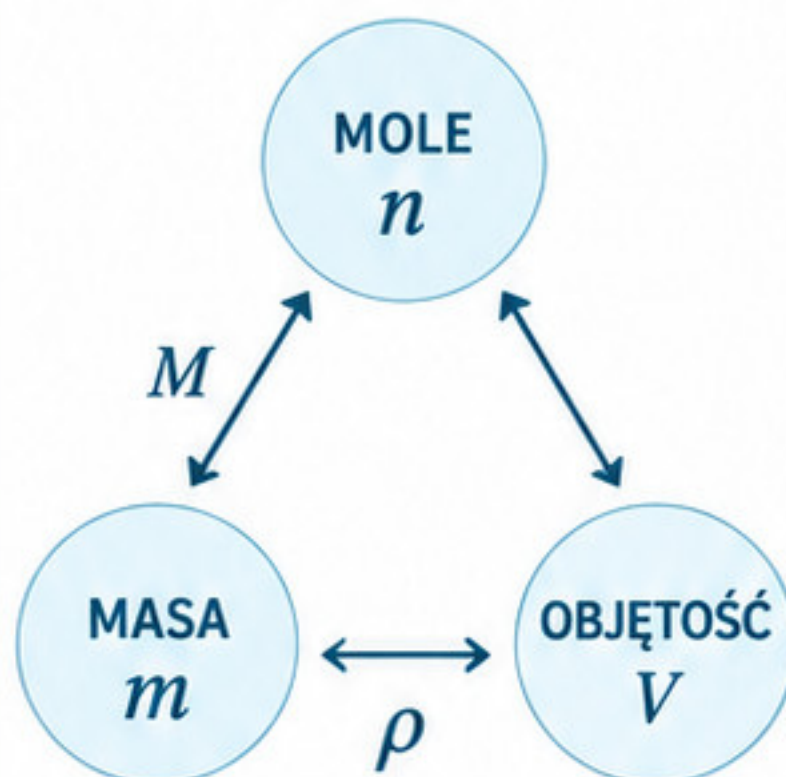
Gdy przeliczasz masę na liczbę moli lub odwrotnie.



Uwaga

Jednostki masy w m i M muszą być zgodne.

PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI



Masa, liczba moli i objętość są ze sobą powiązane przez masę molową (M) i gęstość (ρ).

02 Gęstość

WZÓR

$$\rho = \frac{m}{V} \quad | \quad m = \rho V$$

CO OZNACZA

Zależność między masą, objętością i gęstością.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

ρ	— gęstość	[kg/m ³]
V	— objętość	[m ³]

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy znasz dwa z trzech parametrów (m , ρ , V) i chcesz wyznaczyć trzeci.

03 Strumień masowy

WZÓR

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad | \quad \text{Wartość średnia: } \dot{m} \approx \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

CO OZNACZA

Ilość masy przepływająca w jednostce czasu.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

$\dot{m}$	— strumień masowy	[kg/s]
-----------	-------------------	--------

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy analizujesz przepływ masy w czasie (np. w rurociągu, reaktorze).

04 Strumień molowy

WZÓR

$$\dot{n} = \frac{dn}{dt}$$

CO OZNACZA

Ilość substancji przepływająca w jednostce czasu.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

$\dot{n}$	— strumień molowy	[mol/s]
-----------	-------------------	---------

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy analizujesz przepływ molowy (np. w bilansach materiałowych).

05 Strumień objętościowy

WZÓR

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} \quad | \quad \text{Dla cieczy o stałej gęstości: } \dot{m} = \rho \dot{V}$$

CO OZNACZA

Objętość przepływająca w jednostce czasu.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

$\dot{V}$	— strumień objętościowy	[m ³ /s]
-----------	-------------------------	---------------------

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy analizujesz przepływ objętościowy, np. w rurociągu lub podczas dozowania cieczy.



Uwaga

Nie używaj symbolu m zamiennie dla masy i strumienia masowego. Kropka nad symbolem oznacza wielkość odniesioną do czasu:

$$m \neq \dot{m}.$$

Mini-przykład

Ciecz o gęstości 800 kg/m³ przepływa z natężeniem 0,002 m³/s.
 $\dot{m} = 800 \cdot 0,002 = 1,6 \text{ kg/s}$

$$0,002 \text{ m}^3/\text{s} \xrightarrow{\times 800 \text{ kg/m}^3} 1,6 \text{ kg/s}$$

06

Jak opisać skład mieszaniny?

Najczęstsze sposoby opisu składu mieszaniny i jak przechodzić między ilością składnika, ułamkiem i stężeniem.

01 Ułamek molowy

WZÓR

$$x_i = \frac{n_i}{n_{tot}} \quad \sum x_i = 1$$

CO OZNACZA

Udział liczby moli składnika i w całkowitej liczbie moli mieszaniny.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

x_i	— ułamek molowy składnika i	[—]
n_i	— liczba moli składnika i	[mol]
n_{tot}	— całkowita liczba moli mieszaniny	[mol]

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy opisujesz skład mieszaniny w jednostkach molowych.

02 Ułamek masowy

WZÓR

$$w_i = \frac{m_i}{m_{tot}} \quad \sum w_i = 1$$

CO OZNACZA

Udział masy składnika i w całkowitej masie mieszaniny.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

w_i	— ułamek masowy składnika i	[—]
m_i	— masa składnika i	[kg]
m_{tot}	— całkowita masa mieszaniny	[kg]

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy opisujesz skład mieszaniny w jednostkach masowych.

03 Stężenie molowe

WZÓR

$$c_i = \frac{n_i}{V}$$

CO OZNACZA

Liczba moli składnika i w jednostce objętości mieszaniny.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

c_i	— stężenie molowe składnika i	[mol/m ³]
n_i	— liczba moli składnika i	[mol]
V	— objętość mieszaniny	[m ³]

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy interesuje Cię stężenie wyrażone liczbą moli na jednostkę objętości (np. w roztworach).

04 Stężenie masowe

WZÓR

$$c_{m,i} = \frac{m_i}{V}$$

CO OZNACZA

Masa składnika i w jednostce objętości mieszaniny.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

$c_{m,i}$	— stężenie masowe składnika i	[kg/m ³]
m_i	— masa składnika i	[kg]
V	— objętość mieszaniny	[m ³]

KIEDY STOSOWAĆ

Gdy interesuje Cię stężenie wyrażone masą na jednostkę objętości (np. w roztworach).

05 Ciśnienie cząstkowe w idealnej mieszaninie gazów

WZÓR

$$p_i = y_i P$$

CO OZNACZA

Ciśnienie cząstkowe składnika i w idealnej mieszaninie gazów.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

p_i	— ciśnienie cząstkowe składnika i	[Pa]
y_i	— ułamek molowy składnika i w fazie gazowej	[—]
P	— ciśnienie całkowite	[Pa]

KIEDY STOSOWAĆ

Dla idealnych mieszanin gazów (gdy obowiązuje prawo Daltona).

Oznaczenia i uwagi

PODSTAWOWE OZNACZENIA

x_i	— ułamek molowy (w cieczy)
y_i	— ułamek molowy (w gazie)
w_i	— ułamek masowy
c_i	— stężenie molowe
$c_{m,i}$	— stężenie masowe

WAŻNA UWAGA

W różnych podręcznikach mogą być stosowane nieco inne oznaczenia. Zawsze sprawdź definicję symboli w danym źródle.

! Uwaga

Udział molowy, udział masowy i stężenie to różne wielkości. Nie wolno stosować ich zamiennie tylko dlatego, że wszystkie opisują skład mieszaniny.

Mini-przykład

Mieszanina zawiera 2 mol składnika A i 8 mol składnika B.

$$x_A = \frac{2}{10} = 0,20$$

$$x_B = \frac{8}{10} = 0,80$$

$$\text{Kontrola: } x_A + x_B = 1$$



07

Najważniejsza logika bilansowa

Uniwersalny schemat bilansowania, z którego wynikają prostsze wzory.

GŁÓWNA ZASADA

AKUMULACJA = WEJŚCIE – WYJŚCIE + POWSTAWANIE – ZUŻYCIE

Ilość substancji znajdująca się w układzie może zmieniać się dlatego, że materiał wpływa, wypływa, powstaje lub jest zużywany.

01 DLA CAŁKOWITEJ MASY

WZÓR

$$\frac{dm_{CV}}{dt} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out}$$

CO OZNACZA

Szybkość zmiany całkowitej masy w objętości kontrolnej jest równa sumie strumieni masy wpływających minus suma strumieni masy wypływających.

SYMBOLE I JEDNOSTKI

m_{CV} — masa w objętości kontrolnej [kg]

$\dot{m}$ — strumień masy [kg/s]

KIEDY STOSOWAĆ

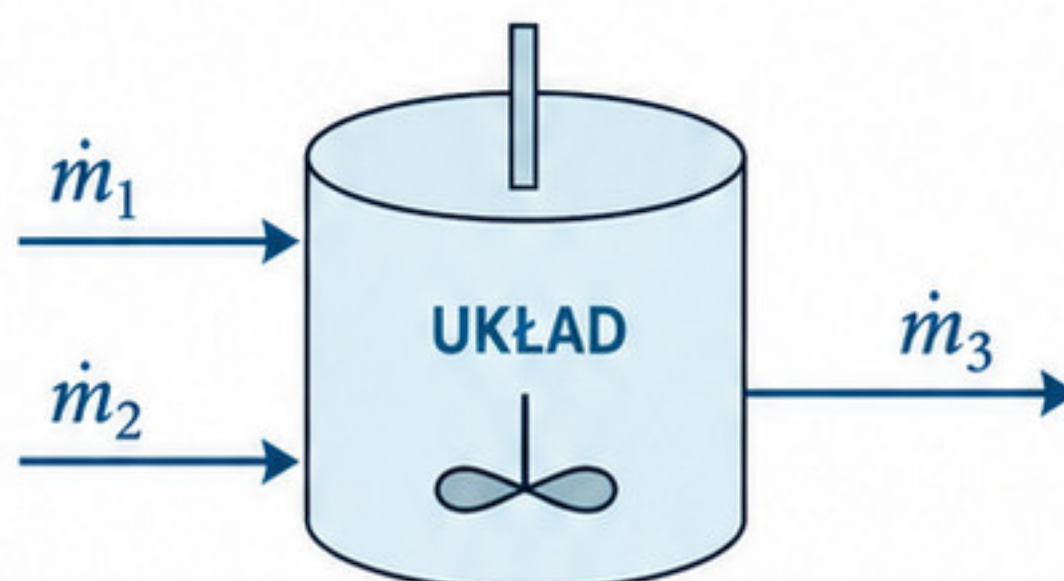
Podstawowy bilans masy dla dowolnego układu.



CV oznacza objętość kontrolną (control volume).

W zwykłych procesach chemicznych całkowita masa nie powstaje ani nie znika.

03 Przykład: mieszalnik



$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

dla stanu ustalonego

Mini-przykład

Do mieszalnika wpływa: 2 kg/s strumienia A, 3 kg/s strumienia B. W stanie ustalonym, bez innych odpływów:

$$\dot{m}_{out} = 2 + 3 = 5 \text{ kg/s}$$



Uwaga

Stan ustalony nie oznacza, że materiał się nie porusza. Oznacza, że wielkości opisujące układ nie zmieniają się z czasem w obserwowanym punkcie lub objętości kontrolnej.

02 STAN USTALONY

WZÓR

$$\frac{dm_{CV}}{dt} = 0 \quad \text{zatem} \quad \sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out}$$

CO OZNACZA

W stanie ustalonym masa w układzie nie zmienia się w czasie, a suma strumieni masy wpływających jest równa sumie strumieni masy wypływających.

04 Kiedy stosować

Zasada bilansowa ma zastosowanie praktycznie we wszystkich operacjach jednostkowych. Najczęstsze przykłady:



mieszalniki



rozdzielacze



zbiorniki



wymienniki



kolumny



reaktory



praktycznie
każdy układ
procesowy

Bilansuj nie tylko całość – śledź konkretny składnik

Zobacz, jak bilans całkowity różni się od bilansu konkretnego składnika, zwłaszcza gdy zachodzi reakcja.

OGÓLNY BILANS SKŁADNIKA i

OGÓLNA POSTAĆ

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum \dot{n}_{i,in} - \sum \dot{n}_{i,out} + \dot{n}_{i,gen} - \dot{n}_{i,cons}$$

POSTAĆ Z SZYBKością REAKCJI

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum \dot{n}_{i,in} - \sum \dot{n}_{i,out} + r_i V$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

n_i	— liczba moli składnika i	[mol]
$\dot{n}_i$	— strumień molowy składnika i	[mol/s]
r_i	— szybkość tworzenia składnika na jednostkę objętości	[mol/(m ³ s)]
V	— objętość reakcyjna	[m ³]

ZNAK SZYBKości REAKCJI

$r_i > 0$	— składnik powstaje
$r_i < 0$	— składnik jest zużywany

BEZ REAKCJI

Składnik tylko przepływa przez układ.



SZYBKÓŚĆ REAKCJI

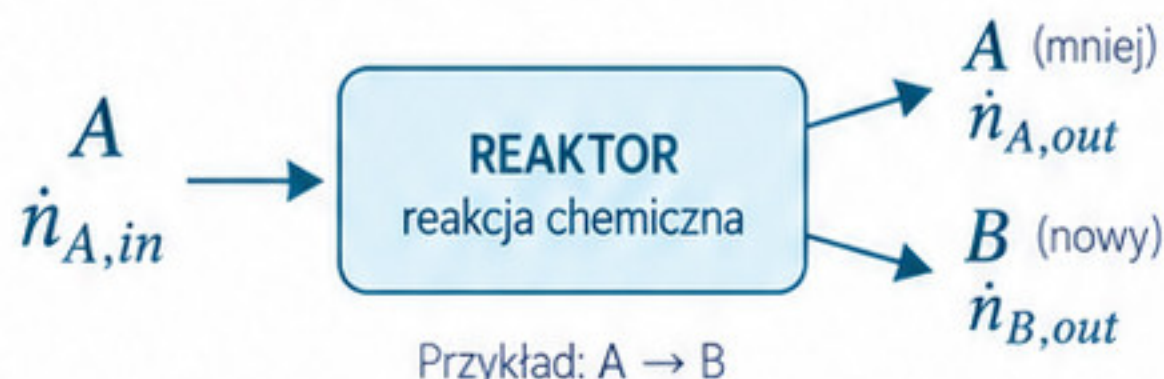
$$r_i = 0$$

STAN STACJONARNY

$$\sum \dot{n}_{i,in} = \sum \dot{n}_{i,out}$$

Z REAKCJĄ

Składnik może być zużywany lub powstawać.



DLA SKŁADNIKA A

$$r_A < 0$$

składnik A jest zużywany

DLA SKŁADNIKA B

$$r_B > 0$$

składnik B powstaje

ZALEŻNOŚĆ OD SKŁADU STRUMIENIA

Strumień molowy składnika można wyrazić przez ułamek molowy.

FAZA CIEKŁA (x_i)

$$\dot{n}_i = x_i \dot{n}$$

FAZA GAZOWA (y_i)

$$\dot{n}_i = y_i \dot{n}$$

CO OZNACZA

- x_i — ułamek molowy składnika i w fazie ciekłej (zgodnie z przyjętą tutaj notacją)
- y_i — ułamek molowy składnika i w fazie gazowej (zgodnie z przyjętą tutaj notacją)

MINI-PRZYKŁAD

Strumień 10 mol/s zawiera 30% molowych składnika A.

$$\dot{n}_A = 0,30 \cdot 10 = 3 \text{ mol/s}$$



Uwaga

Całkowita masa jest zachowana, ale ilość konkretnego reagenta może się zmniejszać, a ilość produktu zwiększać. Dlatego bilans całkowity i bilans składnika odpowiadają na różne pytania.

Energia też ma swoje wejścia i wyjścia

Uniwersalny szkielet bilansu energii przed uproszczonymi wersjami na następnej stronie.

01 PEŁNA LOGIKA

$$\text{AKUMULACJA ENERGII} = \text{ENERGIA DOPROWADZONA} - \text{ENERGIA ODPROWADZONA}$$

Dla otwartej objętości kontrolnej należy uwzględnić energię przenoszoną ze strumieniami oraz wymianę ciepła i pracę.

02 OGÓLNA POSTAĆ

$$\frac{dE_{cv}}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}_s + \sum_{in} \dot{m} \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right) - \sum_{out} \dot{m} \left(h + \frac{v^2}{2} + gz \right)$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

E_{cv} — energia zgromadzona w objętości kontrolnej [J]

$\dot{Q}$ — szybkość przekazywania ciepła [W]

$\dot{W}_s$ — moc lub praca techniczna związana np. z wałem [W]

$\dot{m}$ — strumień masowy [kg/s]

h — entalpia właściwa [J/kg]

v — prędkość [m/s]

g — przyspieszenie ziemskie [m/s²]

z — wysokość [m]

03 TRZY FORMY ENERGII STRUMIENIA DO ROZPOZNANIA



Entalpia — h
Energia związana ze stanem substancji.



Energia kinetyczna — $v^2/2$
Energia związana z ruchem strumienia.



Energia potencjalna — gz
Energia związana z położeniem w polu grawitacyjnym.

04 STAN USTALONY

$$\frac{dE_{cv}}{dt} = 0$$

W stanie ustalonym pozostaje bilans między ciepłem, pracą a energią przenoszoną ze strumieniami.

05 PRAKTYCZNA WSKAZÓWKA

W wielu zadaniach część członów jest pomijalna. Kluczem nie jest zapamiętanie jak najkrótszej wersji, lecz rozpoczęcie od bilansu ogólnego i świadome wykreślenie członów wynikających z założeń.

06 Nie wykreślaj bez powodu



- $\Delta v^2/2$ — może być ważne w dyszach i przepływach o dużej zmianie prędkości
- $g\Delta z$ — może być ważne przy dużych różnicach wysokości
- $\dot{Q}$ — można pominąć dopiero przy założeniu procesu adiabatycznego.

07 Mini-przykład: wymiennik ciepła

Dla prostego wymiennika ciepła: brak pracy wałowej, zwykle pomijalne zmiany energii kinetycznej, zwykle pomijalne zmiany energii potencjalnej. Wtedy bilans sprowadza się głównie do zmian entalpii i wymiany ciepła.

→ **Następnie:** jak uprościć ten bilans dla podgrzewacza, chłodnicy, wymiennika i procesu adiabatycznego →

10

Jak uprościć bilans energii?

Pełny bilans energii zawiera wszystkie możliwe formy energii. W praktyce wiele z nich można pominąć — ale tylko wtedy, gdy wynika to z warunków procesu.

01 STAN USTALONY + POMIJALNE ZMIANY E_k I E_p

WZÓR

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m}(h_{out} - h_{in})$$

czyli:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m}\Delta h$$

KIEDY STOSOWAĆ:

- proces jest ustalony
- nie ma istotnych zmian prędkości
- nie ma dużej zmiany wysokości

DRZEWO UPROSZCZEŃ

BILANS OGÓLNY

stan ustalony

$$\Delta E_k \approx 0$$

$$\Delta E_p \approx 0$$

brak pracy wałowej

$$\dot{Q} = \dot{m}\Delta h$$

brak przemiany fazowej,
stałe c_p

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p\Delta T$$

02 PODGRZEWACZ LUB CHŁODNICA

WZÓR

$$\dot{W}_s = 0$$

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_{out} - h_{in})$$

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_{out} - T_{in})$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

c_p	— ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu	[J/(kg·K)]
T	— temperatura lub różnica temperatur	[K] w K/°C
$\dot{Q}$	— moc cieplna	[W]

03 PROCES ADIABATYCZNY

WZÓR

$$\dot{Q} = 0$$

! Adiabatyczny $\neq$ izotermiczny.

Proces adiabatyczny nie wymienia ciepła z otoczeniem, ale temperatura może się zmieniać.

04 WYMIENNIK CIEPŁA JAKO CAŁY UKŁAD

WZÓR

$$\dot{Q}_{hot} + \dot{Q}_{cold} = 0$$

$$|\dot{Q}_{hot}| = |\dot{Q}_{cold}|$$

$$\dot{m}_h c_{p,h}(T_{h,in} - T_{h,out}) = \dot{m}_c c_{p,c}(T_{c,out} - T_{c,in})$$

MINI-PRZYKŁAD

Woda przepływa z natężeniem: $\dot{m} = 2 \text{ kg/s}$ i jest ogrzewana z 20°C do 40°C. Przyjąć: $c_p = 4180 \text{ J/(kg·K)}$.

Obliczenia:

$$\dot{Q} = 2 \cdot 4180 \cdot (40 - 20)$$

$$\dot{Q} = 167\,200 \text{ W}$$

Wynik:

$$\dot{Q} \approx 167 \text{ kW}$$



Uwaga

Nie stosować $\dot{Q} = \dot{m}c_p\Delta T$ automatycznie przy parowaniu, skraplaniu lub innych przemianach fazowych. W takich przypadkach należy uwzględnić entalpię przemiany.

02

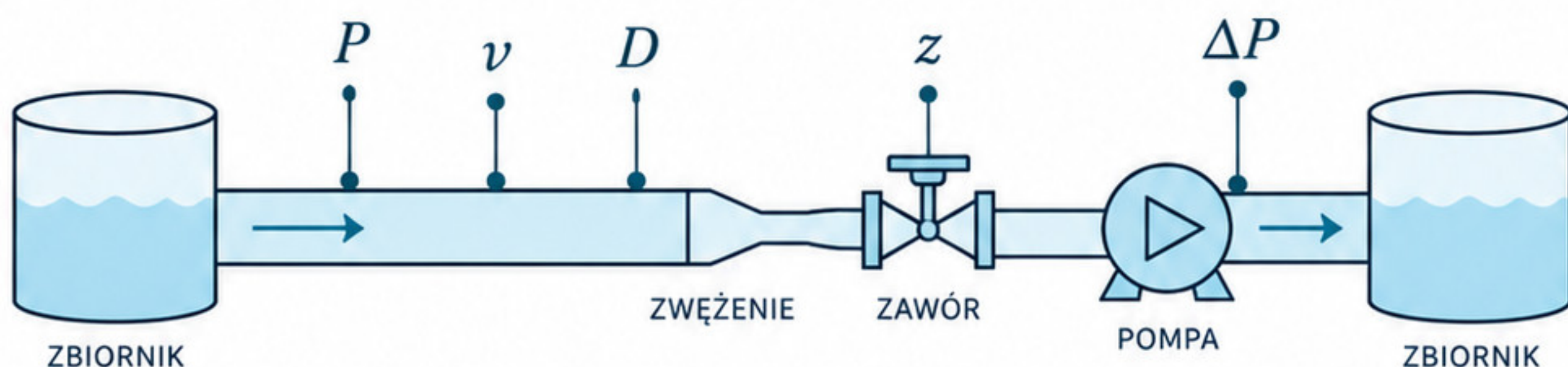
Przepływ płynów

Od natężenia przepływu do spadku ciśnienia i mocy pompy.

Ile płynie?

Jak szybko płynie?

Jakie ciśnienie tracimy?



$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

Cel modułu

Zebrać kluczowe zależności opisujące ruch cieczy i gazów w przewodach oraz pokazać, jak rozpoznawać charakter przepływu i szacować energię potrzebną do transportu płynu.



równanie
ciągłości



równanie
Bernoulliego



liczba
Reynoldsa



przepływ laminarny
i turbulentny



straty
ciśnienia



opory
miejscowe



przepływ przez
złoża porowate



pompy, wysokość
podnoszenia i moc

Jeżeli przekrój się zmienia, prędkość też się zmienia

Pokazać zależność między strumieniem masowym, strumieniem objętościowym, polem przekroju oraz średnią prędkością płynu.

01 PODSTAWOWA ZALEŻNOŚĆ

WZORY

$$\dot{V} = A v \quad \left| \quad A = \frac{\pi D^2}{4} \quad \left| \quad v = \frac{\dot{V}}{A} \right. \right.$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

A	— pole przekroju przepływu	[m ²]
v	— średnia prędkość płynu	[m/s]
$\dot{V}$	— strumień objętościowy	[m ³ /s]

02 STRUMIEŃ MASOWY

WZÓR

$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

CO OZNACZA

Strumień masowy jest iloczynem gęstości i strumienia objętościowego.

WZÓR PO PRZEKSZTAŁCENIU

$$\dot{m} = \rho A v$$

03 RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

DLA USTALONEGO PRZEPŁYWU

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

DLA CIECZY NIEŚCIŚLIWEJ

jeżeli $\rho_1 \approx \rho_2$, to

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Gdy pole przekroju maleje, prędkość płynu rośnie.

04 NAJWAŻNIEJSZA INTERPRETACJA

Jeżeli pole przekroju maleje: $A \downarrow$,
to przy stałym przepływie objętościowym: $v \uparrow$.

Mini-przykład

$$D = 0,05 \text{ m}$$

$$\dot{V} = 0,002 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A = \frac{\pi(0,05)^2}{4} \approx 0,001963 \text{ m}^2$$

$$v = \frac{0,002}{0,001963} \approx 1,02 \text{ m/s}$$

$$v \approx 1,02 \text{ m/s}$$



Uwaga

W przypadku gazów o znaczących zmianach ciśnienia gęstość może się zmieniać. Wtedy nie wolno automatycznie redukować równania do $A_1 v_1 = A_2 v_2$.



Szybka kontrola

Jeżeli dla tego samego $\dot{V}$ zmniejszysz średnicę rury o połowę, pole przekroju spadnie czterokrotnie — a prędkość wzrośnie około czterokrotnie.

13

Ciśnienie, prędkość i wysokość wymieniają się energią

Pokazać użytkownikowi energetyczną interpretację przepływu oraz podstawową postać równania Bernoulliego.

01 IDEALNA POSTAĆ RÓWNANIA

WZÓR

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{const.}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

02 TRZY SKŁADNIKI

Wysokość ciśnienia

$$\frac{P}{\rho g}$$

Jest związana z ciśnieniem statycznym.

Wysokość prędkości

$$\frac{v^2}{2g}$$

Jest związana z energią kinetyczną przepływu.

Wysokość położenia

$$z$$

Jest związana z położeniem w polu grawitacyjnym.

Każdy człon ma wymiar długości [m].

03 GŁÓWNA INTERPRETACJA – WYMIANA ENERGII

CIŚNIENIE

$$\frac{P}{\rho g}$$

energia ciśnienia
(wysokość ciśnienia)

PRĘDKOŚĆ

$$\frac{v^2}{2g}$$

energia kinetyczna
(wysokość prędkości)

WYSOKOŚĆ

$$z$$

energia potencjalna
(wysokość położenia)

W przepływie rzeczywistym te trzy formy energii mogą się wzajemnie zamieniać.

04 WERSJA Z POMPĄ I STRATAMI

WZÓR

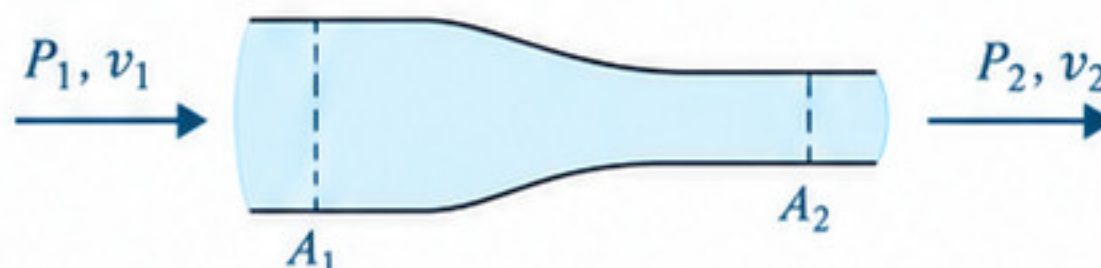
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + H_p = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

CO OZNACZA

H_p — wysokość energii dodanej przez pompę [m]
 h_L — wysokość strat mechanicznych [m]

05 MINI-PRZYKŁAD KONCEPCYJNY

Dla poziomej rury: $z_1 = z_2$. Jeżeli rura się zwęża, prędkość rośnie: $v_2 > v_1$. Przy idealnym przepływie część energii ciśnienia zostaje przekształcona w energię kinetyczną, więc zazwyczaj: $P_2 < P_1$.



06 KIEDY MOŻNA UŻYĆ PROSTEGO BERNOULLIEGO?

- ✓ przepływ ustalony
- ✓ płyn w przybliżeniu nieściśliwy
- ✓ porównujemy punkty na tej samej linii przepływu
- ✓ brak istotnych strat
- ✓ brak dodatkowej pracy pompy/turbiny w analizowanym odcinku



Uwaga

Równanie Bernoulliego w idealnej postaci nie uwzględnia tarcia. W realnym rurociągu: $h_L > 0$. Dlatego ciśnienie rzeczywiste na końcu przewodu będzie niższe niż przewidywałby model bezstratny.

Laminarny czy turbulentny? Sprawdź Re

Dać użytkownikowi natychmiastowe narzędzie do rozpoznania charakteru przepływu w rurze.

GŁÓWNY WZÓR

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad | \quad Re = \frac{v D}{\nu} \quad | \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

INTERPRETACJA

Liczba Reynoldsa porównuje znaczenie efektów bezwładności i lepkości. Małe Re: dominuje lepkość → przepływ uporządkowany. Duże Re: silniejsze efekty bezwładności → przepływ staje się bardziej turbulentny.

SYMBOLE

Re	liczba Reynoldsa	[-]
ρ	gęstość	[kg/m ³]
v	średnia prędkość	[m/s]
D	średnica charakterystyczna	[m]
μ	lepkość dynamiczna	[Pa·s]
ν	lepkość kinematyczna	[m ² /s]

ZAKRESY LICZBY REYNOLDSA I STRUKTURA PRZEPŁYWU



DLA PRZEPŁYWU W OKRĄGŁEJ RURZE

$Re < 2300$	→ przepływ laminarny
$2300 \lesssim Re \lesssim 4000$	→ obszar przejściowy
$Re > 4000$	→ przepływ turbulentny

Mini-przykład

Dane:

$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
 $v = 1 \text{ m/s}$
 $D = 0,05 \text{ m}$
 $\mu = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Obliczenia:

$$Re = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 0,05}{1,0 \times 10^{-3}} = 50\,000$$

Wynik:

$Re = 50\,000$
→ przepływ turbulentny

DLACZEGO TO WAŻNE?

Charakter przepływu wpływa na:

	μ			
opory hydrauliczne	współczynnik tarcia	wymianę ciepła	wymianę masy	mieszanie



Uwaga

Granice 2300 i 4000 dotyczą klasycznego przepływu wewnętrznego w rurze. W innych geometriach stosuje się odpowiednio zdefiniowaną długość charakterystyczną, często średnicę hydrauliczną.

Tarcie kosztuje ciśnienie

Pokazać podstawowy wzór Darcy'ego–Weisbacha oraz zależność strat od długości przewodu, średnicy, prędkości i współczynnika tarcia.

01 GŁÓWNY WZÓR – DARCY–WEISBACH

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta P_f = f \frac{L}{D} \frac{\rho v^2}{2}$$

02 SYMBOLE

h_f	— strata wysokości energii	[m]
ΔP_f	— spadek ciśnienia	[Pa]
f	— współczynnik tarcia Darcy'ego	[-]
L	— długość rury	[m]
D	— średnica wewnętrzna	[m]
v	— średnia prędkość	[m/s]
ρ	— gęstość	[kg/m ³]

03 NAJWAŻNIEJSZA INTERPRETACJA

$$\Delta P_f \propto L$$

Straty rosną liniowo z długością przewodu.

$$\Delta P_f \propto \frac{1}{D}$$

Mniejsza średnica oznacza większe straty.

$$\Delta P_f \propto v^2$$

Straty rosną z kwadratem prędkości — wzrost prędkości może szybko zwiększyć spadek ciśnienia.

04 WSPÓŁCZYNNIK TARCIA

Przepływ laminarny
(w okrągłej rurze)

$$f = \frac{64}{Re}$$

W zakresie turbulentnym wartość f wyznacza się np. z diagramu Moody'ego lub odpowiedniej korelacji.

Przepływ turbulentny

f zależy m.in. od liczby Reynoldsa i względnej chropowatości $\frac{\epsilon}{D}$

05 STRATY MIEJSCOWE

$$h_m = K \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta P_m = K \frac{\rho v^2}{2}$$

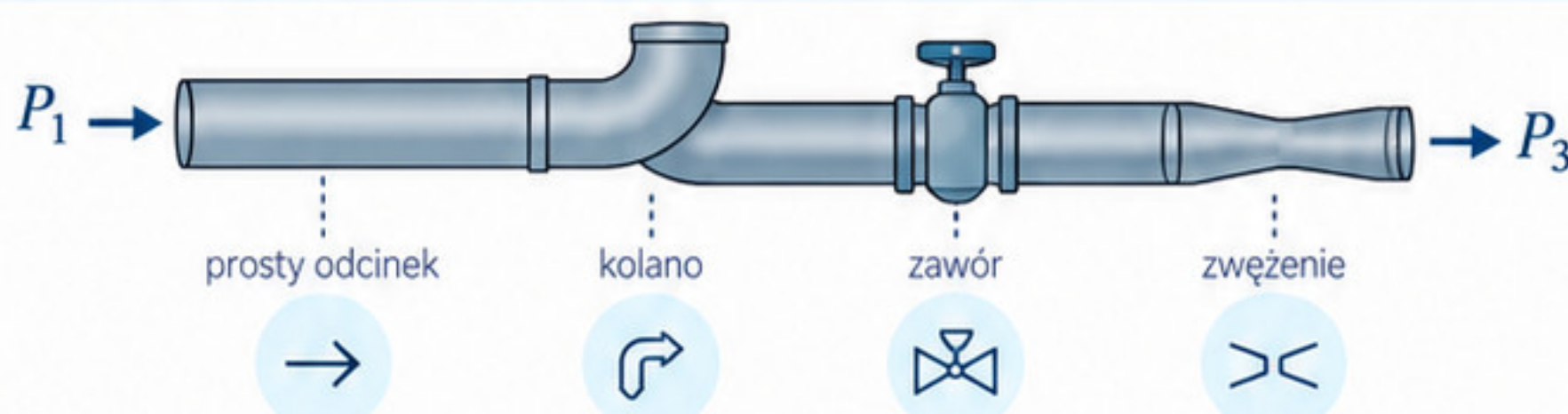
K — współczynnik oporu miejscowego [-]

06 CAŁKOWITE STRATY

$$h_L = h_f + \sum h_m$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum K \frac{v^2}{2g}$$

07 PRZYKŁAD ELEMENTÓW I PROFILU CIŚNIENIA



08 MINI-PRZYKŁAD

$f = 0,02$, $L = 20$ m, $D = 0,05$ m
 $\rho = 1000$ kg/m³, $v = 1,5$ m/s

$$\Delta P_f = 0,02 \cdot \frac{20}{0,05} \cdot \frac{1000(1,5)^2}{2}$$

$$\Delta P_f = 9000 \text{ Pa}$$

9 kPa



Uwaga

Nie mylić współczynnika tarcia Darcy'ego z współczynnikiem Fanninga. W niektórych źródłach stosowana jest inna definicja i wartości różnią się czterokrotnie.

16

Gdy płyn przepływa między cząstkami

Wprowadzić najważniejsze zależności stosowane do opisu przepływu przez warstwy ziarniste, wypełnienia i złoża porowate.

KLUCZOWE POJĘCIE – POROWATOŚĆ

wzór

$$\varepsilon = \frac{V_{void}}{V_{bed}} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

co oznacza

V_{void} — objętość wolnej przestrzeni

V_{bed} — całkowita objętość złoża

PRĘDKOŚĆ POWIERZCHNIOWA

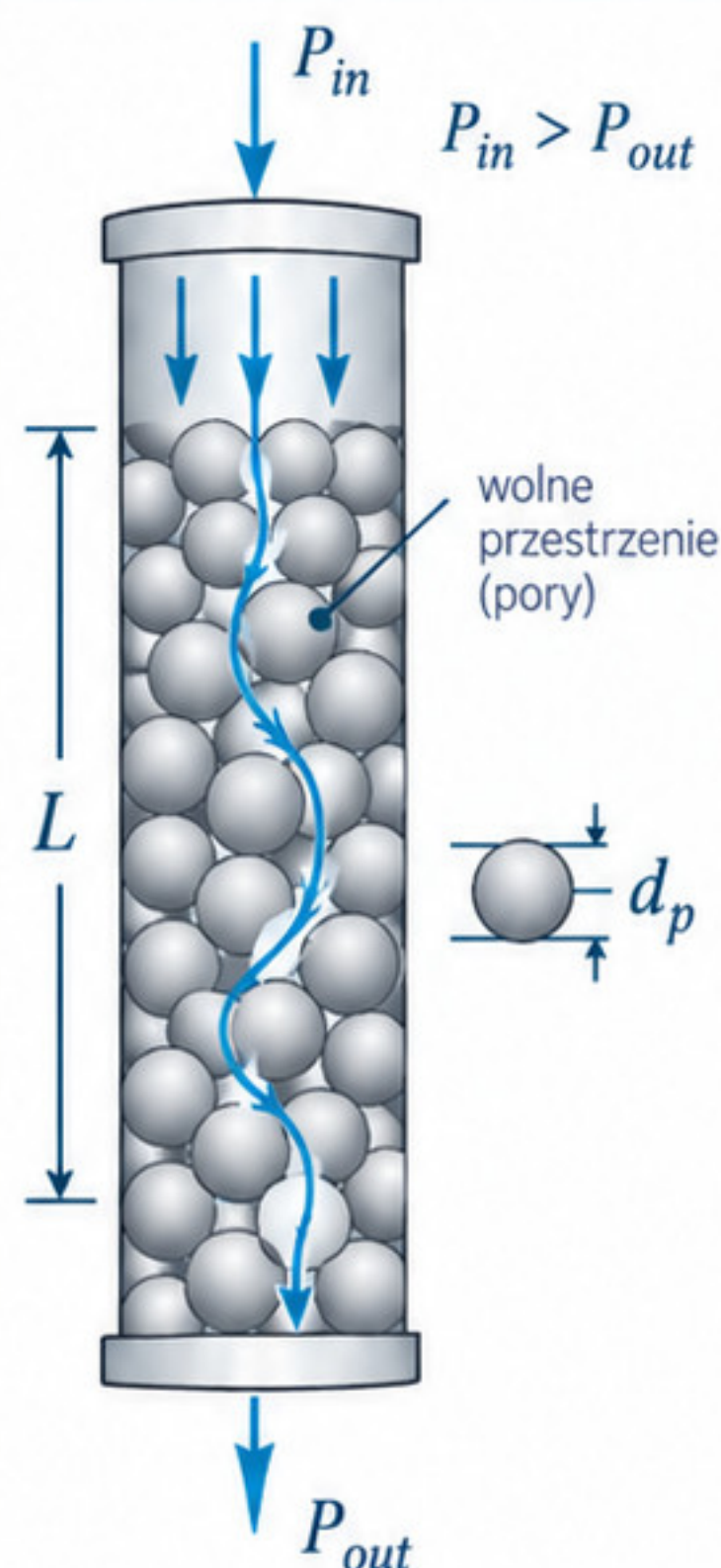
wzór

$$u_s = \frac{\dot{V}}{A}$$

co oznacza

To prędkość obliczona tak, jakby płyn przepływał przez cały przekrój aparatu. Nie jest to rzeczywista lokalna prędkość płynu w porach.

Przepływ przez warstwę ziarnistą



RÓWNANIE ERGUNA

wzór

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{150 \mu (1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3 d_p^2} u_s + \frac{1,75 \rho (1 - \varepsilon)}{\varepsilon^3 d_p} u_s^2$$

symbole

ΔP	— spadek ciśnienia	[Pa]
L	— wysokość/długość złoża	[m]
μ	— lepkość dynamiczna	[Pa·s]
ρ	— gęstość płynu	[kg/m³]
ε	— porowatość	[-]
d_p	— charakterystyczna średnica cząstek	[m]
u_s	— prędkość powierzchniowa	[m/s]

INTERPRETACJA DWÓCH CZŁONÓW

Pierwszy człon (lepki)

$$\propto u_s$$

dominuje przy niższych prędkościach i silniejszym wpływie lepkości.

Drugi człon (bezwładnościowy)

$$\propto u_s^2$$

staje się ważniejszy przy większych prędkościach i efektach bezwładnościowych.

CO ZWIĘKSZA SPADEK CIŚNIENIA?

↓	mniejsze cząstki $d_p \downarrow$	→	$\Delta P \uparrow$
↑	dłuższe złożo $L \uparrow$	→	$\Delta P \uparrow$
↑	większa prędkość $u_s \uparrow$	→	$\Delta P \uparrow$
↓	mniejsza porowatość $\varepsilon \downarrow$	→	zwykle $\Delta P \uparrow$

KIEDY STOSOWAĆ?


kolumny
z wypełnieniem


złoża
katalityczne


filtry
ziarniste


adsorbery


reaktory
ze złożem stałym



Uwaga

Równanie Erguna zakłada określony sposób reprezentacji złoża i charakterystycznej średnicy cząstek. Dla bardzo nieregularnych cząstek mogą być potrzebne dodatkowe współczynniki korekcyjne.

Ile energii musi dostarczyć pompa?

Połączyć równanie Bernoulliego, wysokość podnoszenia oraz moc hydrauliczną w jeden praktyczny schemat obliczeniowy.

01 WYSOKOŚĆ PODNOSZENIA POMPY

ROZSZERZONE RÓWNANIE BERNOULLIEGO

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + H_p = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

WYSOKOŚĆ PODNOSZENIA

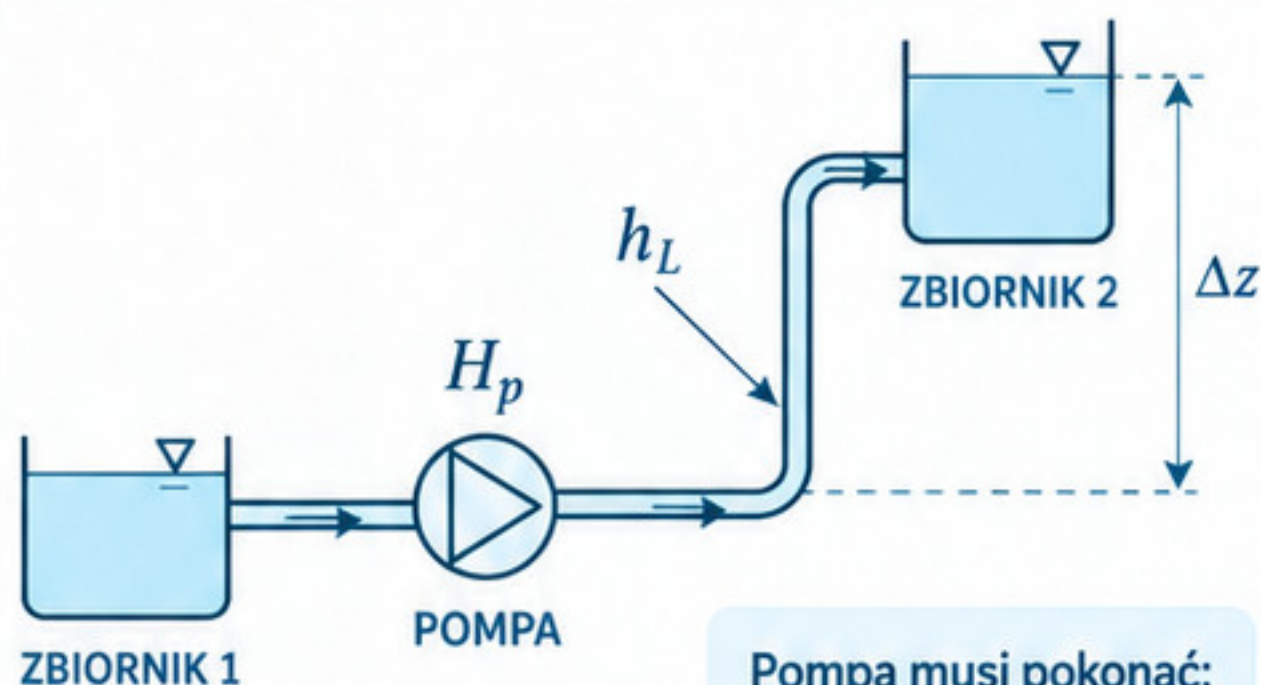
$$H_p = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + h_L$$

gdzie:

H_p — wysokość podnoszenia pompy [m]

h_L — suma strat hydraulicznych w układzie [m]

02 SCHEMAT UKŁADU



Pompa musi pokonać:
 $\Delta P + \Delta z + \text{straty}$

03 INTERPRETACJA

Pompa musi dostarczyć energię, aby:



podnieść ciśnienie



zwiększyć wysokość położenia



pokonać straty tarcia



zwiększyć energię kinetyczną strumienia.

04 MOC HYDRAULICZNA

WZORY

$$P_h = \rho g \dot{V} H_p$$

$$P_h = \dot{m} g H_p$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

P_h — moc hydrauliczna [W]

ρ — gęstość [kg/m³]

$\dot{V}$ — strumień objętościowy [m³/s]

$\dot{m}$ — strumień masowy [kg/s]

H_p — wysokość podnoszenia [m]

05 SPRAWNOŚĆ POMPY

WZORY

$$P_{in} = \frac{P_h}{\eta_p}$$

$$P_{in} = \frac{\rho g \dot{V} H_p}{\eta_p}$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

P_{in} — moc pobierana z silnika [W]

η_p — sprawność pompy [—]

06 PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

DANE

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{V} = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H_p = 20 \text{ m}$$

$$\eta_p = 0,75$$

OBLICZENIA

$$P_h = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,01 \cdot 20 = 1962 \text{ W}$$

$$P_{in} = \frac{1962}{0,75} \approx 2616 \text{ W}$$

WYNIK

$$P_{in} \approx 2,62 \text{ kW}$$



Uwaga

Sprawność nigdy nie zwiększa mocy użytecznej. Ponieważ $\eta_p < 1$, moc pobrana z silnika musi być większa niż moc hydrauliczna przekazana płynowi.

07 MAPA DECYZYJNA



Szukasz wymaganej wysokości podnoszenia? → użyj rozszerzonego Bernoulliego.



Szukasz mocy hydraulicznej? → $\rho g \dot{V} H_p$

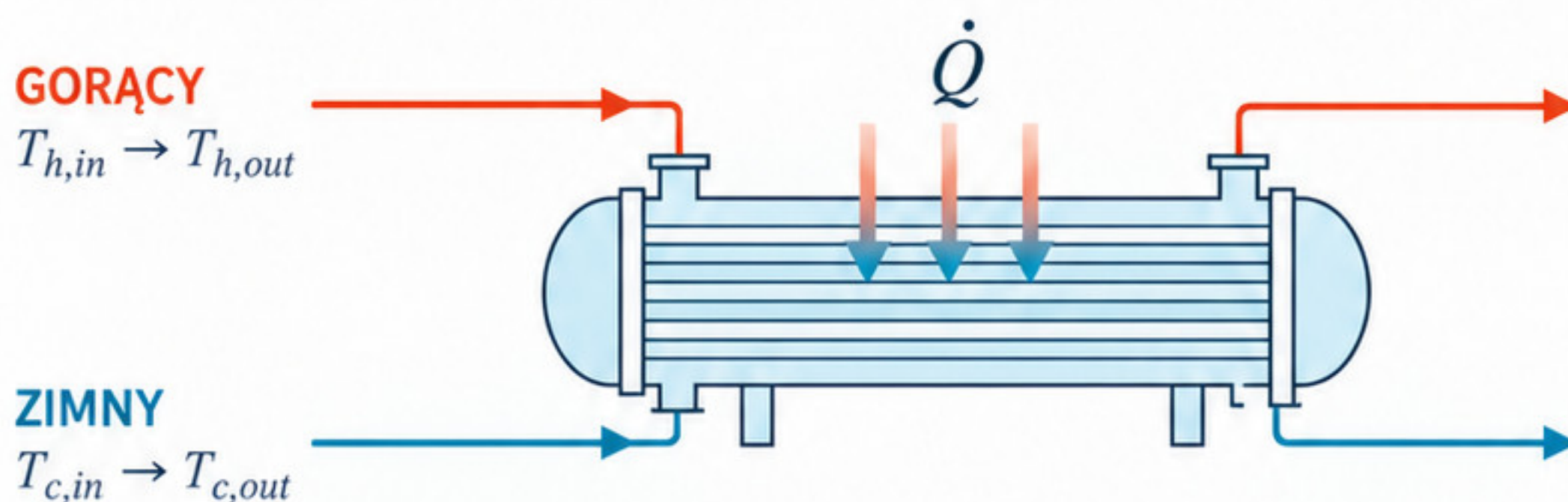


Szukasz mocy silnika/pobieranej? → podziel przez η_p .

03

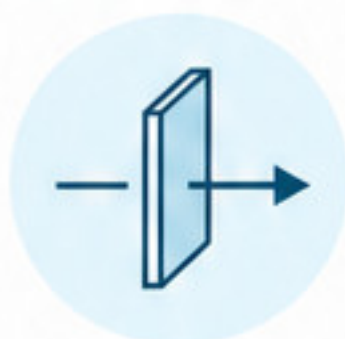
Wymiana ciepła

Od różnicy temperatur do strumienia ciepła.



STRUMIEŃ CIEPŁA = SIŁA NAPĘDOWA $\times$ ZDOLNOŚĆ TRANSPORTU

$$\dot{Q} = UA \Delta T$$



PRZEWODZENIE
 energia przez materiał



KONWEKcja
 energia między powierzchnią a płynem



PRZENIKANIE
 połączenie wielu oporów cieplnych

Cel modułu

Zebrać najważniejsze równania opisujące transport energii cieplnej przez przewodzenie, konwekcję i wymienniki ciepła.



ciepło jawne



ciepło przemiany fazowej



moc cieplna



przewodzenie



konwekcja



całkowity współczynnik przenikania ciepła



logarytmiczna średnia różnica temperatur



metoda ϵ -NTU

19

Najpierw ustal: zmiana temperatury czy zmiana fazy?

Rozróżnić dwa podstawowe mechanizmy pochłaniania lub oddawania energii: zmianę temperatury bez zmiany fazy oraz przemianę fazową.

01 CIEPŁO JAWNE

WZORY

Dla określonej masy:

$$Q = mc_p \Delta T$$

$$Q = mc_p (T_2 - T_1)$$

Dla procesu ciągłego:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p \Delta T$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

Q	— ilość energii cieplnej	[J]
$\dot{Q}$	— moc cieplna	[W]
m	— masa	[kg]
$\dot{m}$	— strumień masy	[kg/s]
c_p	— ciepło właściwe	[J/(kg·K)]
ΔT	— zmiana temperatury	[K lub °C]

i Różnica temperatur wyrażona w kelwinach ma taką samą wartość liczbową jak różnica temperatur w stopniach Celsjusza.

02 CIEPŁO PRZEMIANY FAZOWEJ

WZORY

Dla określonej masy:

$$Q = m \Delta h_{phase}$$

$$Q = m \Delta h_{vap}$$

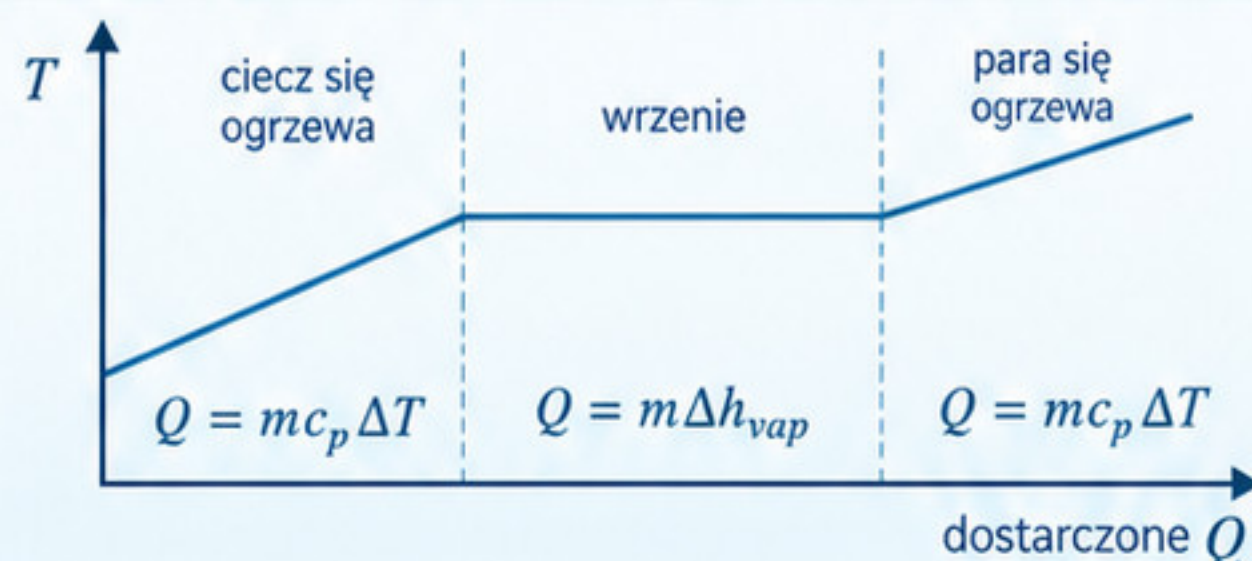
Dla procesu ciągłego:

$$\dot{Q} = \dot{m} \Delta h_{vap}$$

CO OZNACZA

Podczas idealizowanej przemiany fazowej przy ustalonym ciśnieniu znaczna ilość energii może być dostarczana lub odbierana bez proporcjonalnej zmiany temperatury.

Krzywa ogrzewania (przykład: woda przy ciśnieniu atmosferycznym)



03 MINI-PRZYKŁAD — OGRZEWANIE WODY

Dane:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$c_p = 4,18 \text{ kJ/(kg·K)}$$

$$\Delta T = 40 \text{ K}$$

Obliczenia:

$$Q = 2 \cdot 4,18 \cdot 40 = 334,4 \text{ kJ}$$

$$Q \approx 334 \text{ kJ}$$

04 MINI-MAPA WYBORU WZORU



! Uwaga

Jeżeli c_p silnie zmienia się z temperaturą, dokładniejsza postać to: $\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$. W podstawowych zadaniach często stosuje się wartość średnią c_p .

➔ Następnie: jak ciepło przechodzi przez materiał? ➔ Prawo Fouriera

Ciepło przepływa przez materiał zgodnie z gradientem temperatury

Poznaj prawo Fouriera i zobacz, jak przewodność cieplna, powierzchnia, grubość materiału oraz różnica temperatur wpływają na szybkość przewodzenia ciepła.

01 PRAWO FOURIERA — POSTAĆ OGÓLNA

WZÓR

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx}$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

$\dot{Q}$	— szybkość przepływu ciepła	[W]
k	— przewodność cieplna materiału	[W/(m·K)]
A	— powierzchnia prostopadła do kierunku przepływu ciepła	[m ²]
$\frac{dT}{dx}$	— gradient temperatury	[K/m]

02 DLACZEGO WYSTĘPUJE ZNAK „-”?

Ciepło przepływa samorzutnie z obszaru wyższej temperatury (T_{hot}) do obszaru niższej temperatury (T_{cold}).

Znak „-” w prawie Fouriera oznacza, że strumień ciepła jest skierowany przeciwnie do kierunku wzrostu temperatury – od wyższej do niższej temperatury.

i Gradient temperatury $\frac{dT}{dx}$ jest dodatni w kierunku wzrostu temperatury, a przepływ ciepła zachodzi w kierunku przeciwnym.

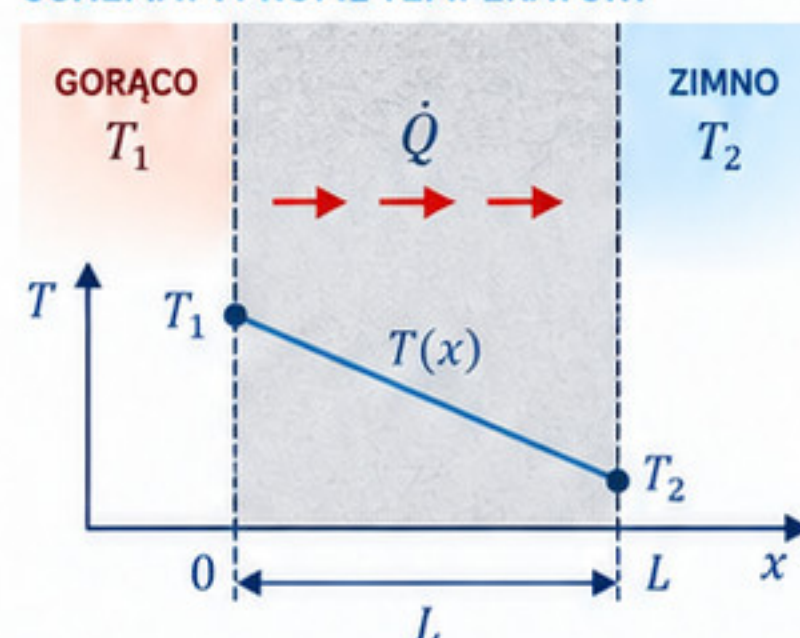
03 ŚCIANA PŁASKA — STAN USTALONY

WZÓR

$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

$T_1 > T_2$

SCHEMAT I PROFIL TEMPERATURY



04 STRUMIEŃ CIEPŁA NA JEDNOSTKĘ POWIERZCHNI

Strumień ciepła (gęstość strumienia ciepłego) to szybkość przepływu ciepła przypadająca na jednostkę powierzchni.

DEFINICJA

$$q'' = \frac{\dot{Q}}{A}$$

WZÓR (postać różniczkowa)

$$q'' = -k \frac{dT}{dx}$$

JEDNOSTKA

q''	— strumień ciepła	[W/m ²]
-------	-------------------	---------------------

05 OPÓR CIEPLNY PRZEWODZENIA

WZÓR NA OPÓR CIEPLNY

$$R_{cond} = \frac{L}{kA}$$

ZWIĄZEK Z RÓŻNICĄ TEMPERATUR

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{cond}}$$

ANALOGIA ELEKTRYCZNA

Prawo Ohma:

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

Przewodzenie ciepła:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{th}}$$

06 JAK PARAMETRY WPŁYWAJĄ NA PRZEWODZENIE?

Większe k	→ łatwiejsze przewodzenie	→ $\dot{Q} \uparrow$
Większe A	→ większa powierzchnia wymiany	→ $\dot{Q} \uparrow$
Większe L	→ dłuższa droga transportu	→ $\dot{Q} \downarrow$
Większe ΔT	→ większa siła napędowa	→ $\dot{Q} \uparrow$

07 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

k	$= 0,8 \text{ W/(m·K)}$
A	$= 10 \text{ m}^2$
L	$= 0,20 \text{ m}$
T_1	$= 40^\circ\text{C}$
T_2	$= 20^\circ\text{C}$

Obliczenia:

$$\dot{Q} = 0,8 \cdot 10 \cdot \frac{40 - 20}{0,20} = 800 \text{ W}$$

$$\dot{Q} = 0,8 \text{ kW}$$



Uwaga

Wzór $\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L}$ zakłada przewodzenie jednowymiarowe, stan ustalony, stałą (lub reprezentatywną) przewodność cieplną oraz brak wewnętrznych źródeł ciepła w materiale.

Między powierzchnią a płynem: prawo Newtona

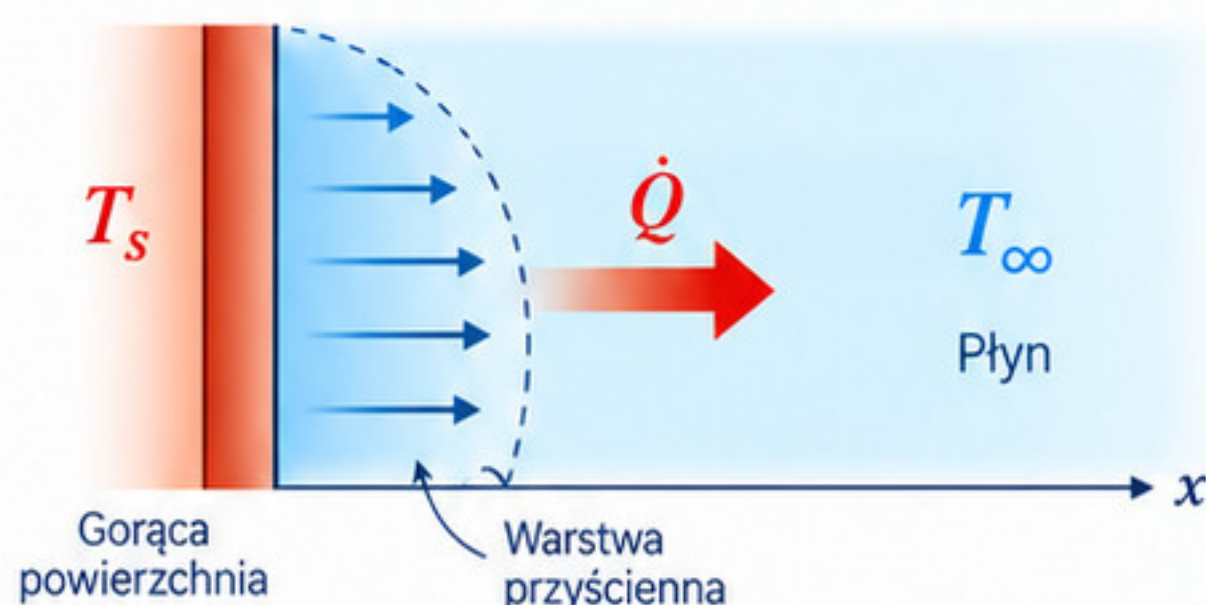
Podstawowy model konwekcji opisujący wymianę ciepła między powierzchnią a płynem oraz znaczenie współczynnika przejmowania ciepła.

01 PRAWO NEWTONA O CHŁODZENIU

WZÓR

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty)$$

$$|\dot{Q}| = hA |T_s - T_\infty|$$



02 SYMBOLE

h	– współczynnik przejmowania ciepła	$[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$
A	– powierzchnia wymiany	$[\text{m}^2]$
T_s	– temperatura powierzchni	$[\text{°C lub K}]$
T_∞	– reprezentatywna temperatura płynu z dala od powierzchni	$[\text{°C lub K}]$
$\dot{Q}$	– moc cieplna	$[\text{W}]$

03 CO OZNACZA h ?

Współczynnik przejmowania ciepła h nie jest wyłącznie właściwością materiału. Zależy od płynu, jego właściwości fizycznych, prędkości przepływu, reżimu przepływu, geometrii powierzchni oraz jej orientacji.

$$k \neq h$$

k opisuje przewodność cieplną materiału, a h opisuje wymianę ciepła między powierzchnią a płynem.

04 KONWEKCJA WYMUSZONA

Ruch płynu jest wymuszany przez zewnętrzne urządzenia, np. pompę, wentylator lub mieszadło.



pompa



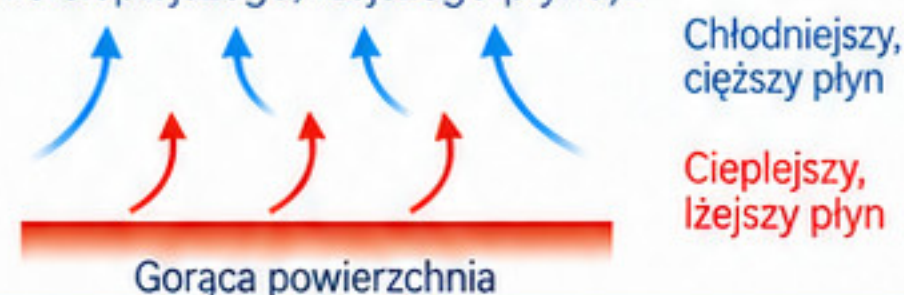
wentylator



mieszadło

05 KONWEKCJA NATURALNA

Ruch płynu wynika głównie ze zmian gęstości spowodowanych różnicami temperatury oraz działaniem siły grawitacji (np. unoszenie cieplejszego, lżejszego płynu).



06 OPÓR KONWEKCYJNY

Wymianę ciepła na drodze konwekcji można zapisać w postaci oporu cieplnego:

$$R_{conv} = \frac{1}{hA}$$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{conv}}$$

gdzie $\Delta T = T_s - T_\infty$.

07 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$T_s = 80 \text{ °C}$$

$$A = 2 \text{ m}^2$$

$$T_\infty = 20 \text{ °C}$$

$$h = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Obliczenia:

$$\dot{Q} = 25 \cdot 2 \cdot (80 - 20) = 3000 \text{ W}$$

$$\dot{Q} = 3,0 \text{ kW}$$

08 SZYBKA INTERPRETACJA

Jeśli h rośnie, to przy tej samej powierzchni wymiany i różnicy temperatur moc cieplna $\dot{Q}$ również rośnie. Dlatego zwiększenie prędkości przepływu płynu często intensyfikuje konwekcyjną wymianę ciepła.



Uwaga

Nie należy stosować przypadkowej wartości h . W obliczeniach inżynierskich współczynnik przejmowania ciepła zazwyczaj wyznacza się z korelacji opartych na liczbach bezwymiarowych, danych literaturowych lub z wyników eksperymentalnych.

Kilka oporów — jeden współczynnik U

Rzeczywiste przenikanie ciepła w wymienniku obejmuje kilka kolejnych oporów i może być opisane za pomocą całkowitego współczynnika przenikania ciepła.

01 GŁÓWNE RÓWNANIE

$$\dot{Q} = U A \Delta T$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

U	— całkowity współczynnik przenikania ciepła	$[\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})]$
A	— powierzchnia wymiany ciepła	$[\text{m}^2]$
ΔT	— odpowiednia siła napędowa temperatury	$[\text{K}]$

02 CO SKŁADA SIĘ NA CAŁKOWITY OPÓR?

Dla płaskiej ścianki:

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv},1} + R_{\text{cond}} + R_{\text{conv},2}$$

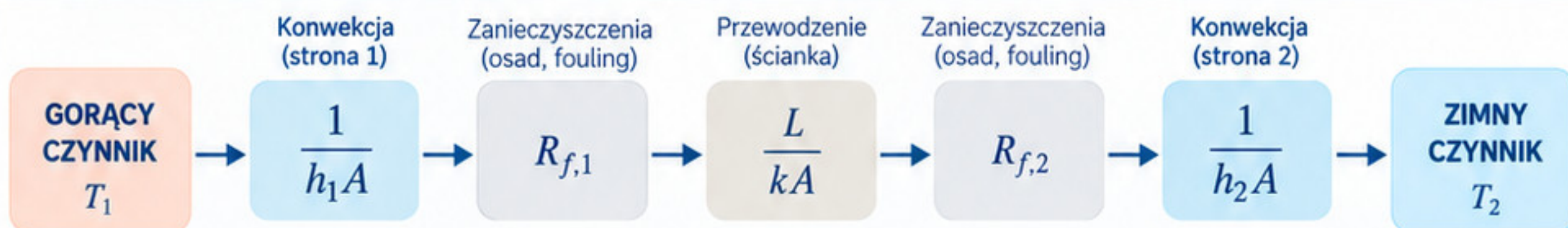
$$R_{\text{tot}} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{k A} + \frac{1}{h_2 A}$$

Po sprowadzeniu do współczynnika U:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}$$

Wzór ten obowiązuje, gdy wszystkie opory odniesione są do tej samej powierzchni wymiany ciepła.

03 ANALOGIA ŁAŃCUCHA OPORÓW



04 ZANIECZYSZCZENIA — FOULING

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + R_{f,1} + \frac{L}{k} + R_{f,2} + \frac{1}{h_2}$$

Wniosek:

większy $R_f \rightarrow U \downarrow \rightarrow$ przy tej samej A i ΔT : $\dot{Q} \downarrow$

06 WAŻNA INTERPRETACJA

Największy opór często najsilniej ogranicza cały proces przenikania ciepła. Jeżeli $h_2 \ll h_1$, to strona o mniejszym współczynniku konwekcji może kontrolować wartość U .

05 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$h_1 = 1000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$$

$$h_2 = 500 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$$

$$L = 0,002 \text{ m}$$

$$k = 15 \text{ W}/(\text{mK})$$

Zanieczyszczenia pomijamy.

Obliczenia:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{1000} + \frac{0,002}{15} + \frac{1}{500}$$

$$= 0,001 + 0,000133 + 0,002 = 0,003133$$

$$U \approx 319 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K})$$



Uwaga

W wymiennikach rurowych powierzchnia po stronie wewnętrznej i zewnętrznej nie jest identyczna. Dokładny wzór na U zależy od przyjętej powierzchni odniesienia. Nie należy mieszać wartości U_i i U_o bez odpowiedniego przeliczenia pól powierzchni.

Gdy różnica temperatur zmienia się wzdłuż wymiennika

W wymiennikach ciepła różnica temperatur między strumieniami zwykle zmienia się wzdłuż urządzenia, dlatego potrzebna jest reprezentatywna wartość średnia – metoda LMTD.

01 GŁÓWNY WZÓR

Średnia logarytmiczna różnica temperatur (LMTD):

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right)}$$

Strumień ciepła w wymienniku:

$$\dot{Q} = UA \Delta T_{lm}$$

02 DLACZEGO LMTD?

Temperatura strumienia gorącego maleje, a strumienia zimnego rośnie wzdłuż wymiennika, dlatego różnica temperatur nie jest stała. Zastosowanie prostej średniej arytmetycznej może prowadzić do istotnych błędów. Metoda LMTD dostarcza reprezentatywną wartość różnicy temperatur, która jest równoważna pod względem przenoszonego ciepła.

03 PRZECIWPRĄD

Różnice temperatur na końcach wymiennika:

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= T_{h,in} - T_{c,out} \\ \Delta T_2 &= T_{h,out} - T_{c,in}\end{aligned}$$

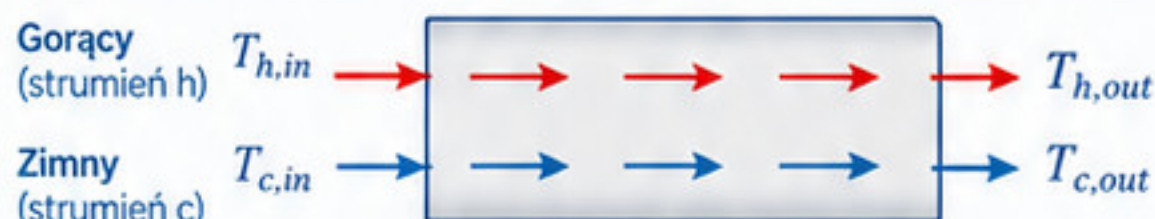
04 WSPÓŁPRĄD

Różnice temperatur na końcach wymiennika:

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= T_{h,in} - T_{c,in} \\ \Delta T_2 &= T_{h,out} - T_{c,out}\end{aligned}$$

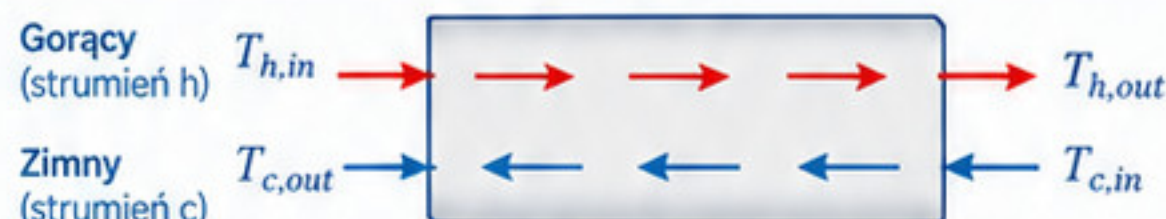
05 DWA SCHEMATY

WSPÓŁPRĄD



Różnica temperatur jest największa na wejściu, a najmniejsza na wyjściu.

PRZECIWPRĄD



Różnica temperatur jest bardziej wyrównana wzdłuż wymiennika, co zwykle pozwala na większy odzysk ciepła.

06 MINI-PRZYKŁAD (PRZECIWPRĄD)

Dane:

$$\begin{aligned}T_{h,in} &= 120\text{ }^{\circ}\text{C} & T_{h,out} &= 80\text{ }^{\circ}\text{C} \\ T_{c,in} &= 20\text{ }^{\circ}\text{C} & T_{c,out} &= 60\text{ }^{\circ}\text{C}\end{aligned}$$

Obliczenia:

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= 120 - 60 = 60\text{ K} \\ \Delta T_2 &= 80 - 20 = 60\text{ K}\end{aligned}$$

$$\Delta T_{lm} = 60\text{ K}$$



Jeśli obie różnice temperatur są równe, wtedy $\Delta T_{lm} = \Delta T$.

07 DRUGI MINI-PRZYKŁAD – RÓŻNE RÓŻNICE

Dane:

$$\Delta T_1 = 80\text{ K} \quad \Delta T_2 = 40\text{ K}$$

Obliczenia:

$$\Delta T_{lm} = \frac{80 - 40}{\ln(80/40)} = \frac{40}{\ln 2} \approx 57,7\text{ K}$$

$$\Delta T_{lm} \approx 57,7\text{ K}$$

08 MAPA UŻYCIA

Czy znasz cztery temperatury na końcach wymiennika?

↓ TAK

Oblicz ΔT_1 i ΔT_2 (zależnie od układu: współprąd lub przeciwprąd).

↓

Oblicz ΔT_{lm} .

↓

Oblicz strumień ciepła:
 $\dot{Q} = UA \Delta T_{lm}$.



Uwaga

Nie podstawiaj bezpośrednio temperatur bezwzględnych do wzoru na LMTD. Najpierw wyznacz dwie różnice temperatur ΔT_1 i ΔT_2 zgodnie z odpowiednim układem (współprąd lub przeciwprąd) i upewnij się, że obie są zdefiniowane w sposób spójny i dodatni.



W bardziej złożonych wymiennikach (np. wielociągowych) stosuje się współczynnik poprawkowy F : $\dot{Q} = UAF \Delta T_{lm}$.

Nie znasz temperatur wyjściowych? Użyj ε -NTU

Metoda ε -NTU (skuteczność – liczba jednostek przenoszenia) jest przydatna, gdy temperatury wyjściowe strumieni są nieznane i nie można bezpośrednio zastosować metody LMTD.

01 KROK 1 – STRUMIENIE POJEMNOŚCI CIEPLNEJ

WZORY

Strumień pojemności cieplnej:

$$C = \dot{m}c_p$$

Dla strumienia gorącego i zimnego:

$$C_h = \dot{m}_h c_{p,h}$$

$$C_c = \dot{m}_c c_{p,c}$$

Następnie:

$$C_{min} = \min(C_h, C_c)$$

$$C_{max} = \max(C_h, C_c)$$

Jednostka: [W/K]

02 KROK 2 – STOSUNEK POJEMNOŚCI

WZÓR

Stosunek strumieni pojemności cieplnej:

$$C_r = \frac{C_{min}}{C_{max}}$$

WŁAŚCIWOŚCI

$$0 \leq C_r \leq 1$$

C_r jest bezwymiarowy.

03 KROK 3 – LICZBA JEDNOSTEK PRZENOSZENIA

WZÓR

Liczba jednostek przenoszenia ciepła:

$$NTU = \frac{UA}{C_{min}}$$

JEDNOSTKI

U – całkowity współczynnik przenikania ciepła [W/(m²·K)]

A – pole powierzchni wymiany ciepła [m²]

UA – iloczyn U i A [W/K]

NTU – bezwymiarowe

04 KROK 4 – SKUTECZNOŚĆ WYMIENNIKA

WZORY

Definicja skuteczności:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}_{actual}}{\dot{Q}_{max}}$$

Maksymalna możliwa wymiana ciepła (dla zadanych temperatur wejściowych):

$$\dot{Q}_{max} = C_{min}(T_{h,in} - T_{c,in})$$

Rzeczywista wymiana ciepła:

$$\dot{Q} = \varepsilon C_{min}(T_{h,in} - T_{c,in})$$

05 JAK WYZNACZYĆ ε ?

Skuteczność ε zależy od:

- 1 liczby jednostek przenoszenia NTU,
- 2 stosunku pojemności C_r ,
- 3 konfiguracji wymiennika (np. przeciwprądowy, współprądowy, krzyżowy).

W praktyce ε wyznacza się z:

- wzorów analitycznych,
- wykresów,
- lub tablic.

06 PRZYKŁAD – WYMIENNIK PRZECIWPŁĄDOWY

Dla wymiennika przeciwprądowego i $C_r \neq 1$:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-NTU(1 - C_r)]}$$

To wzór referencyjny – nie trzeba go zapamiętywać. Dla innych konfiguracji wymienników obowiązują odmienne zależności (wzory, wykresy lub tablice).

07 MINI-PRZYKŁAD KONCEPCYJNY

Dane:

$$C_{min} = 2000 \text{ W/K}$$

$$T_{h,in} = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_{c,in} = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\varepsilon = 0,75$$

Obliczenia:

$$\dot{Q}_{max} = 2000(100 - 20) = 160\,000 \text{ W}$$

$$\dot{Q} = 0,75 \cdot 160\,000 = 120\,000 \text{ W}$$

$$\dot{Q} = 120 \text{ kW}$$

08 LMTD CZY ε -NTU?

Dwie metody –
ten sam fizyczny proces.

LMTD

Temperatury wejściowe i wyjściowe obu strumieni znane.

ε -NTU

Temperatury wyjściowe nieznane, ale znane UA , przepływy i właściwości (c_p).

! Uwaga

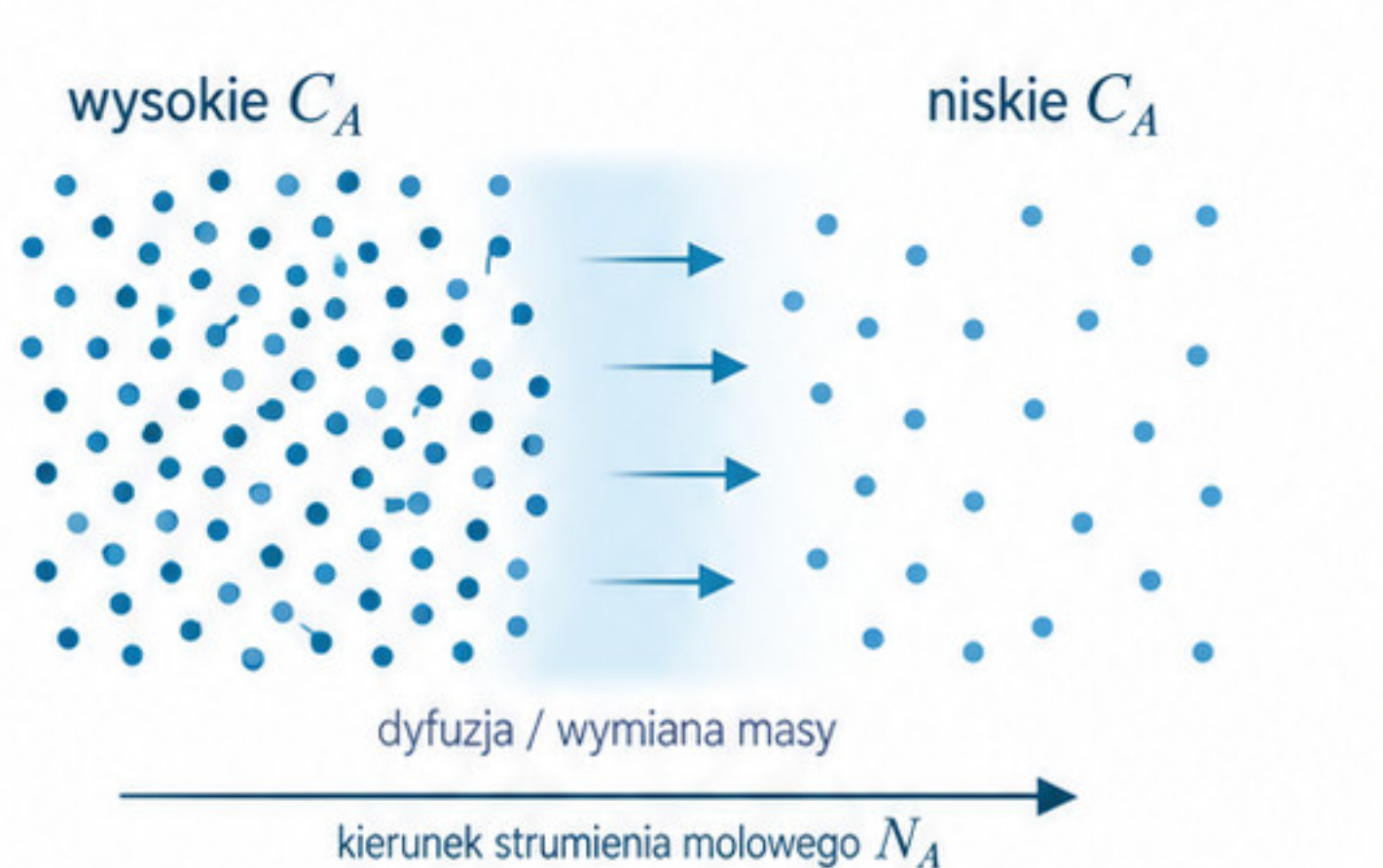
Skuteczność ε w metodzie ε -NTU **nie jest sprawnością mechaniczną**.

Jest to stosunek rzeczywistej wymiany ciepła do maksymalnej możliwej wymiany ciepła dla zadanych temperatur wejściowych.

04

Wymiana masy i procesy rozdzielania

Składnik przemieszcza się tam, gdzie istnieje siła napędowa.



SZYBKOŚĆ TRANSPORTU = SIŁA NAPĘDOWA $\times$ ZDOLNOŚĆ TRANSPORTU



CIEPŁO:

$$\dot{Q} \propto \Delta T$$



MASA:

$$N_A \propto \Delta C_A$$

Cel modułu

Połączyć podstawy dyfuzji i wymiany masy z równowagą fazową oraz kluczowymi ideami absorpcji, destylacji i ekstrakcji.



prawo Ficka



strumień molowy



k_L współczynniki przenoszenia masy



Π liczby bezwymiarowe



równowaga gaz-ciecz



absorpcja



destylacja



α lotność względna



ekstrakcja



współczynnik podziału



Transport mówi 'jak szybko'.



Równowaga mówi 'dokąd proces może dojść'.

26

Dyfuzja: od wysokiego stężenia do niskiego

Pierwsze prawo Ficka opisuje dyfuzję molekularną, w której siłą napędową jest gradient stężenia.

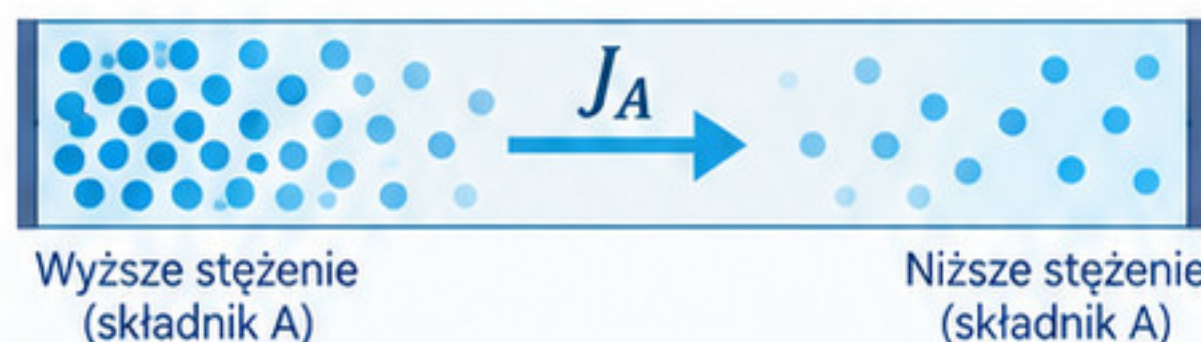
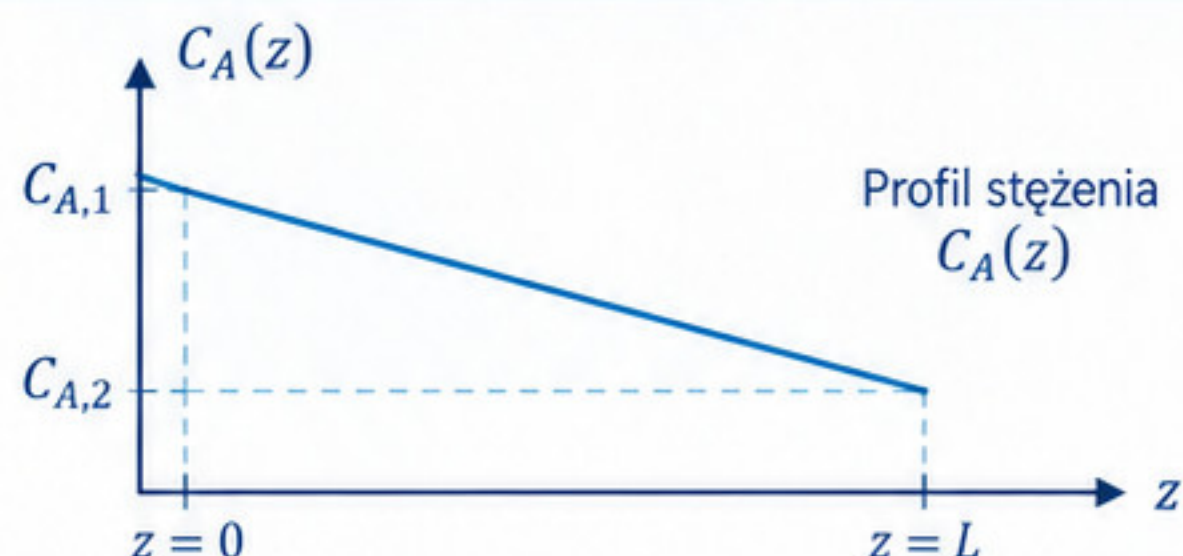
01 PIERWSZE PRAWO FICKA

$$J_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

SYMBOLE

J_A	– dyfuzyjny strumień molowy składnika A	[mol/(m ² ·s)]
D_{AB}	– współczynnik dyfuzji A w B	[m ² /s]
C_A	– stężenie molowe składnika A	[mol/m ³]
z	– współrzędna przestrzenna	[m]

02 GRAFICZNA INTERPRETACJA



03 DLACZEGO MINUS?

Jeśli $dC_A/dz < 0$ (stężenie maleje w kierunku rosnącego z), to znak minus sprawia, że strumień dyfuzyjny J_A jest dodatni skierowany od wyższego do niższego stężenia.

05 CO ZWIĘKSZA SZYBKOŚĆ DYFUZJI?

Większe D_{AB}	→	szybsza dyfuzja
Większa różnica stężeń	→	większa siła napędowa
Mniejsza droga L	→	większy strumień

04 DLA STAŁEGO GRADIENTU

Dla warstwy o grubości L można przyjąć przybliżenie:

$$\frac{dC_A}{dz} \approx \frac{C_{A,2} - C_{A,1}}{L}$$

$$J_A \approx -D_{AB} \frac{C_{A,2} - C_{A,1}}{L}$$

Gdy $C_{A,1} > C_{A,2}$:

$$J_A = D_{AB} \frac{C_{A,1} - C_{A,2}}{L}$$

06 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$D_{AB} = 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$C_{A,1} = 1000 \text{ mol/m}^3$$

$$C_{A,2} = 200 \text{ mol/m}^3$$

$$L = 0,001 \text{ m}$$

Obliczenia:

$$J_A = 2 \times 10^{-9} \cdot \frac{1000 - 200}{0,001}$$

$$= 1,6 \times 10^{-3} \text{ mol/(m}^2\text{s)}$$

$$J_A = 1,6 \times 10^{-3} \text{ mol/(m}^2\text{s)}$$

07 WAŻNE ROZRÓŻNIENIE

Dyfuzja molekularna

- wynika z gradientu stężenia (składu),
- opisuje ruch pojedynczych cząsteczek,
- zachodzi od wyższego do niższego stężenia.

Konwekcja masy

- wynika z ruchu całej fazy (pływu),
- związana jest z przepływem makroskopowym,
- może przenosić składniki niezależnie od gradientu stężenia.



W rzeczywistych procesach dyfuzja molekularna i konwekcja masy mogą występować jednocześnie.

Uwaga To uproszczona, lokalna postać prawa Ficka. W układach wieloskładnikowych, z reakcjami chemicznymi lub silnie nieidealnych mogą być potrzebne bardziej zaawansowane równania.

Zamiast pełnego profilu — użyj współczynnika przenoszenia masy

Praktyczny model przenoszenia masy oparty na współczynniku przenoszenia masy i sile napędowej wyrażonej różnicą stężeń lub składu.

01 PODSTAWOWA FORMA

$$N_A = k_c (C_{A,b} - C_{A,i})$$

SYMBOLE I JEDNOSTKI

N_A	— strumień molowy A	[mol/(m ² · s)]
k_c	— współczynnik przenoszenia masy	[m/s]
$C_{A,b}$	— stężenie w głębi fazy	[mol/m ³]
$C_{A,i}$	— stężenie przy powierzchni międzyfazowej	[mol/m ³]

02 ANALOGIA DO KONWEKCJI CIEPŁA

Ciepło:

$$q'' = h(T_b - T_s)$$

współczynnik × siła napędowa

Masa:

$$N_A = k_c (C_{A,b} - C_{A,i})$$

współczynnik × siła napędowa

03 TRANSPORT MIĘDZY DWIEMA FAZAMI

Po stronie gazowej:

$$N_A = K_G (P_A - P_A^*)$$

Równoważnie (wyrażenie ze składem):

$$N_A = K_y (y_A - y_A^*)$$

y_A to skład (ułamek molowy) A w głębi fazy gazowej, a y_A^* to skład gazu w równowadze z aktualnym składem fazy ciekłej.

Po stronie ciekłej:

$$N_A = K_x (x_A^* - x_A)$$

04 DWIE WARSTWY — DWA OPORY



05 OGÓLNA IDEA OPORÓW

Całkowity opór przenoszenia masy można traktować jako sumę oporów poszczególnych faz (np. gazowej i ciekłej).

Nie istnieje jedno uniwersalne równanie bez określenia przyjętej podstawy stężeń (np. C, x, y, P) i odpowiedniej definicji siły napędowej.

06 MINI-PRZYKŁAD PROSTEGO TRANSPORTU

Dane:

$$k_c = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$C_{A,b} = 10 \text{ mol/m}^3$$

$$C_{A,i} = 4 \text{ mol/m}^3$$

Obliczenia:

$$N_A = 2 \times 10^{-4} (10 - 4) = 1,2 \times 10^{-3} \text{ mol/(m}^2\text{s)}$$

$$N_A = 1,2 \times 10^{-3} \text{ mol/(m}^2\text{s)}$$

07 CO ZWIĘKSZA TRANSPORT?

- 1 Większy współczynnik przenoszenia masy k .
- 2 Większa powierzchnia międzyfazowa.
- 3 Większa siła napędowa (różnica stężeń lub składu).
- 4 Intensywniejszy przepływ lub mieszanie, jeśli zwiększają współczynnik k .



Uwaga

Nie porównuj bezpośrednio różnych współczynników przenoszenia masy, jeśli nie sprawdzisz: przyjętej podstawy stężeń (i jednostek), definicji siły napędowej oraz fazy odniesienia. Ten sam proces może być opisywany za pomocą k_c , k_x , k_y , K_G , K_L itd.

Re, Sc, Sh: trzy liczby, które łączą przepływ i transport masy

Podstawowe liczby bezwymiarowe stosowane w korelacjach na współczynniki przenoszenia masy.

01 LICZBA REYNOLDSA

WZÓR

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu}$$

CO OZNACZA

Stosunek efektów bezwładności do efektów lepkości w przepływie. Określa charakter przepływu (laminarny, przejściowy, turbulentny).

02 LICZBA SCHMIDTA

WZÓRY

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D_{AB}}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$$

CO OZNACZA

Porównuje dyfuzję pędu (lepkość) z dyfuzją masy (dyfuzyjność).

03 LICZBA SHERWOODA

WZÓR

$$Sh = \frac{k_c L}{D_{AB}}$$

CO OZNACZA

Bezwymiarowa miara konwekcyjnego przenoszenia masy w stosunku do czystej dyfuzji molekularnej.

04 SYMBOLE

L	— charakterystyczny wymiar	[m]
D_{AB}	— współczynnik dyfuzji	[m ² /s]
k_c	— współczynnik przenoszenia masy	[m/s]
ν	— lepkość kinematyczna	[m ² /s]

05 TYPOWA STRUKTURA KORELACJI

OGÓLNA POSTAĆ

$$Sh = a Re^m Sc^n$$

a, m, n – stałe zależne od geometrii i warunków przepływu.

WYZNACZENIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZENOSZENIA MASY

$$k_c = \frac{Sh D_{AB}}{L}$$

06 SCHEMAT OBLICZENIOWY

- 1 Właściwości płynu (ρ, μ, D_{AB})
- 2 Warunki przepływu (v, L)
- 3 Oblicz Re i Sc
- 4 Użyj właściwej korelacji $Sh = a Re^m Sc^n$
- 5 Wyznacz $k_c = Sh D_{AB} / L$

07 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$Sh = 50$$

$$D_{AB} = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$L = 0,10 \text{ m}$$

Obliczenia:

$$k_c = \frac{50 \cdot 2 \times 10^{-5}}{0,10} = 0,01 \text{ m/s}$$

$$k_c = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

08 ANALOGIA CIEPŁO ↔ MASA

Wymiana ciepła	Wymiana masy
Pr	Sc
Nu	Sh
h	k_c
przewodność cieplna k	dyfuzyjność D_{AB}



Uwaga

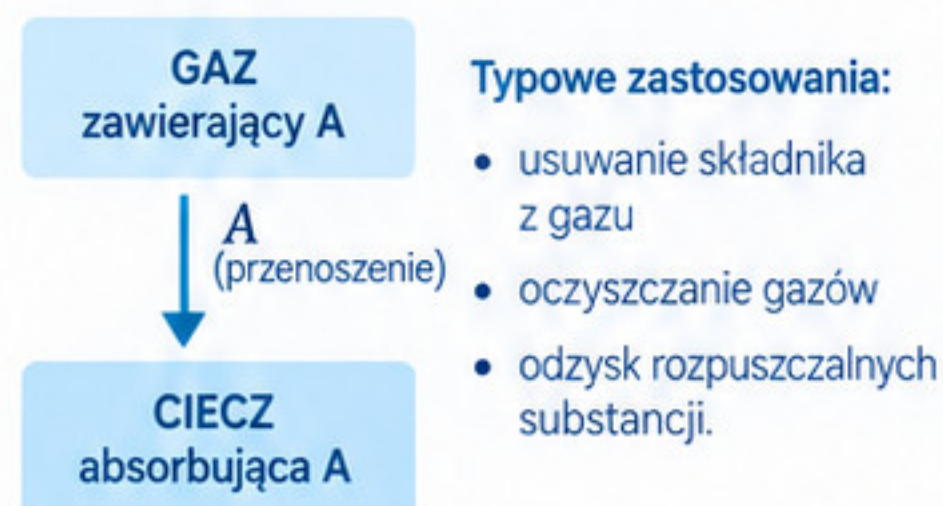
Nie istnieje jedna uniwersalna korelacja $Sh(Re, Sc)$. Przed zastosowaniem konkretnej korelacji zawsze sprawdź: geometrię układu, zakres liczb Re , zakres liczb Sc , definicję wymiaru charakterystycznego oraz warunki przepływu.

Transport mówi 'jak szybko'. Równowaga mówi 'jak daleko'.

Połączyć podstawową zależność równowagi gaz–ciecz z ideą absorpcji i pokazać, jak rozpoznać kierunek transportu.

01 CO TO JEST ABSORPCJA?

Absorpcja to przenikanie składnika z fazy gazowej do fazy ciekłej, w której się rozpuszcza.



02 PRAWO HENRY'EGO

Równowaga gaz–ciecz (dla składnika A):

$$p_A = H_A x_A$$

Ponieważ $p_A = y_A P$, zatem:

$$y_A^* P = H_A x_A$$

$$y_A^* = \frac{H_A}{P} x_A$$

Prosta postać liniowa:

$$y^* = mx$$

gdzie $m = \frac{H}{P}$.

03 CO OZNACZA GWIAZDKA?

y^* to skład fazy gazowej, który byłby w równowadze z daną kompozycją fazy ciekłej x .

Nie jest to automatycznie rzeczywisty skład fazy gazowej, lecz wartość równowagowa wynikająca z prawa Henry'ego.

04 KIERUNEK TRANSPORTU

Porównaj rzeczywisty skład fazy gazowej y z wartością równowagową y^* (dla tego samego x).

Jeśli $y > y^* \rightarrow$ istnieje siła napędowa dla absorpcji:
A: gaz $\rightarrow$ ciecz.

Jeśli $y < y^* \rightarrow$ możliwy jest przepływ w kierunku odwrotnym (desorpcja / stripping):
A: ciecz $\rightarrow$ gaz.

05 SIŁA NAPĘDOWA

Różnica między rzeczywistym składem fazy gazowej a wartością równowagową:

$$\Delta y = y - y^*$$

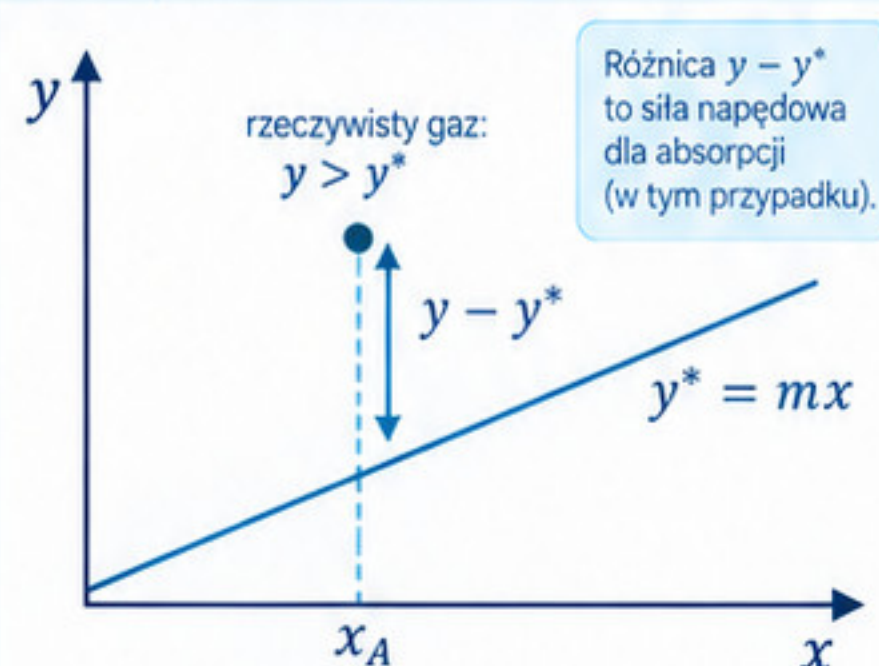
Uproszczony model strumienia przenoszenia masy (od strony gazowej):

$$N_A = K_y (y - y^*)$$

Symbole i jednostki:

N_A — strumień molowy składnika A [mol/(m²·s)]
 K_y — współczynnik przenikania masy (strona gazowa) [mol/(m²·s)]

06 RÓWNOWAGA NA WYKRESIE



07 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$P = 2$ bar
 $H = 4$ bar
 $x_A = 0,05$

Obliczenia:

$$y_A^* = \frac{H}{P} x_A = \frac{4}{2} \cdot 0,05 = 0,10$$

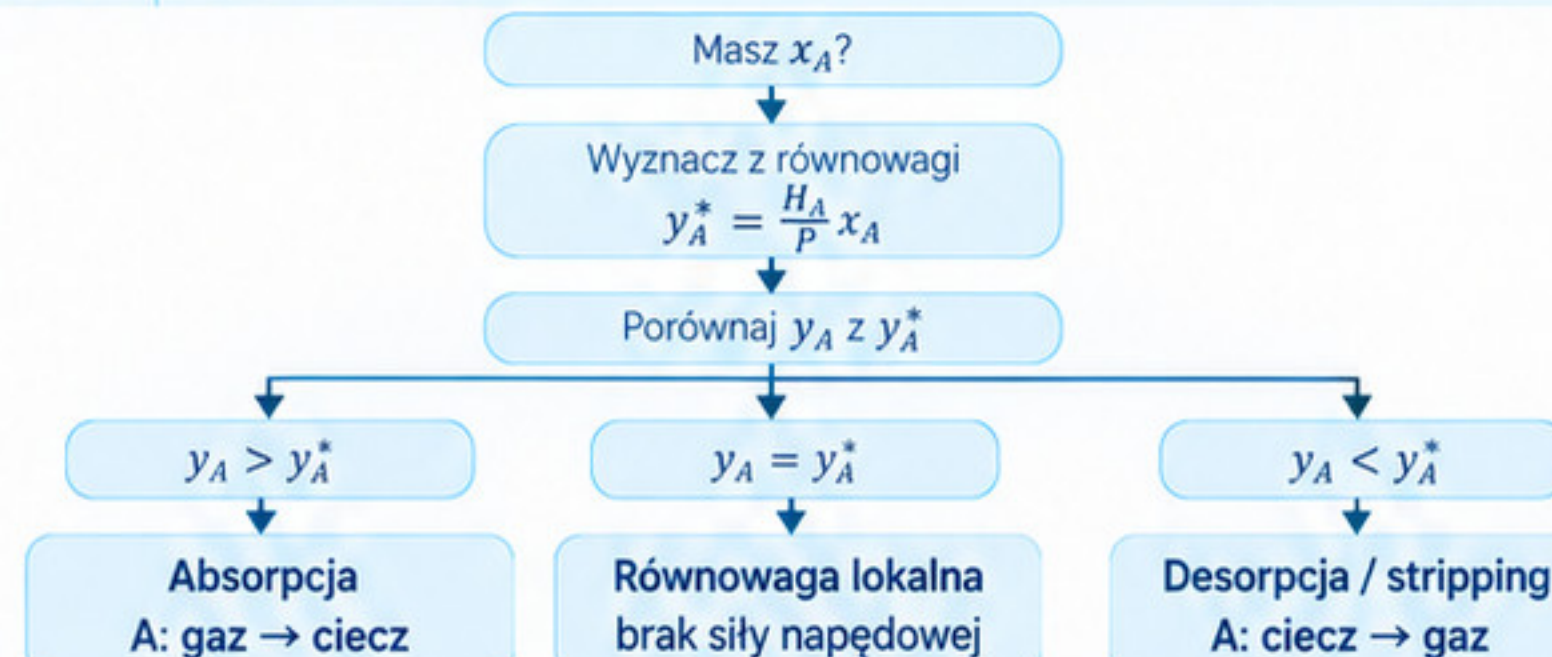
$$\Delta y = y_A - y_A^* = 0,20 - 0,10 = 0,10$$

Wniosek:

Ponieważ $y_A > y_A^*$, składnik A ma tendencję do przechodzenia z fazy gazowej do ciekłej (gaz $\rightarrow$ ciecz).

**$y_A^* = 0,10$, $\Delta y = 0,10$
 kierunek: gaz $\rightarrow$ ciecz**

08 MAPA DECYZYJNA



Uwaga

Stała Henry'ego występuje w literaturze w kilku definicjach i jednostkach. Zawsze sprawdź dokładną postać przed podstawieniem i nie przenoś wartości H między różnymi konwencjami bez przeliczenia.

→ **Następnie:** destylacją — kiedy różnica lotności pozwala rozdzielić ciecz? →

30

Destylacja działa wtedy, gdy składniki różnią się lotnością

Równowaga między cieczą a parą w destylacji oraz znaczenie lotności względnej jako szybkiej miary trudności rozdziału.

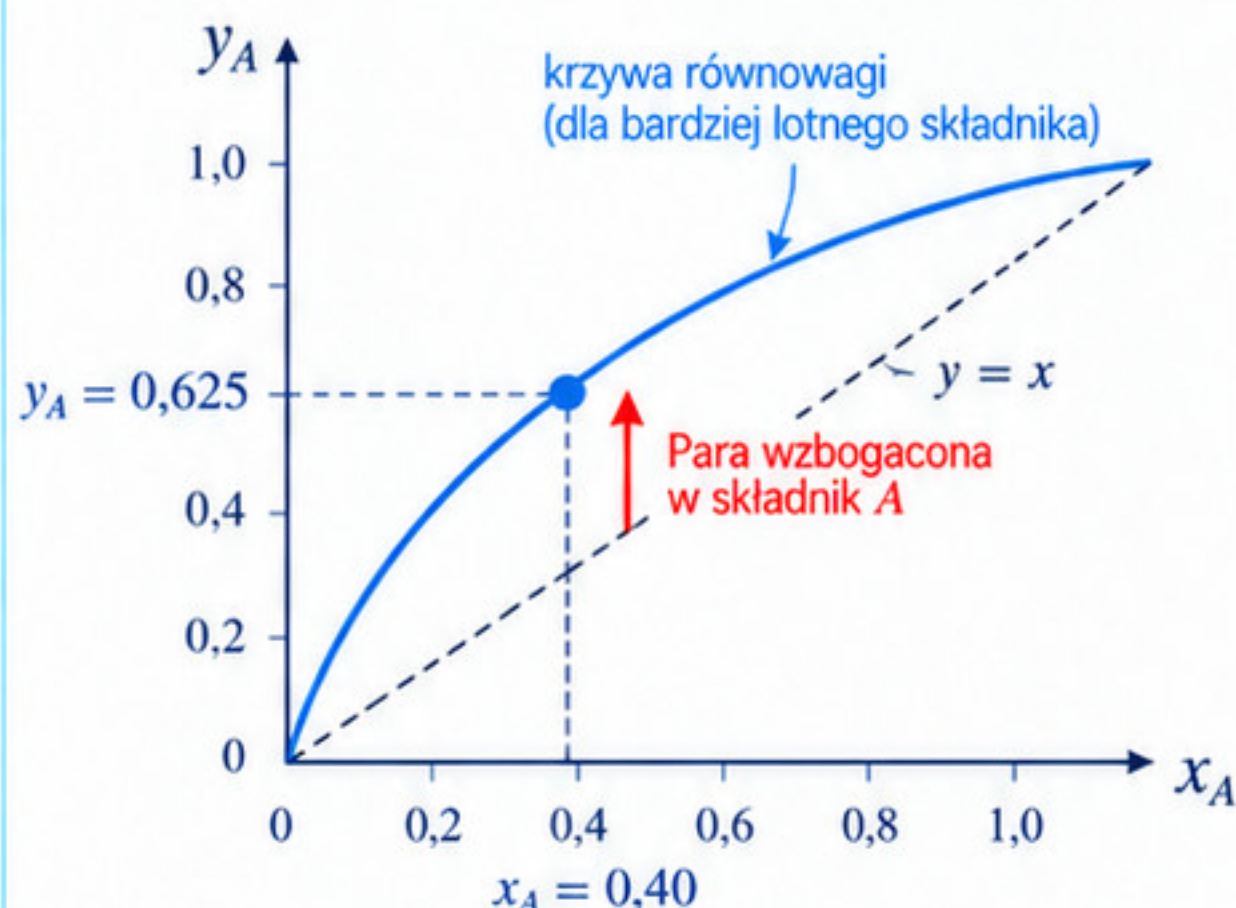
01 | PODSTAWA DESTYLACJI

Jeśli składnik A jest bardziej lotny niż składnik B, to para jest wzbogacona w A w porównaniu z cieczą:

$$y_A > x_A$$

x_A – ułamek molowy składnika A w cieczy

y_A – ułamek molowy składnika A w parze



06 | JEDNOSTKI

x_i – ułamek molowy [-]

y_i – ułamek molowy [-]

K_i – współczynnik równowagi [-]

α_{AB} – lotność względna [-]

08 | MINI-PRZYKŁAD

Dane: $x_A = 0,40$

$\alpha_{AB} = 2,5$

Obliczenia:

$$y_A = \frac{2,5 \cdot 0,40}{1 + (2,5 - 1) \cdot 0,40} = \frac{1,00}{1,60} = 0,625$$

$$y_A = 0,625$$

Interpretacja:

Ciecz zawiera 40% mol A, a para w równowadze zawiera około 62,5% mol A.

02 | WSPÓŁCZYNNIK RÓWNOWAGI

$$K_i = \frac{y_i}{x_i}$$

$K_i > 1 \rightarrow$ składnik i wzbogacony w parze (bardziej lotny)

$K_i < 1 \rightarrow$ składnik i preferuje fazę ciekłą (mniej lotny)

03 | LOTNOŚĆ WZGLĘDNA

$$\alpha_{AB} = \frac{K_A}{K_B}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{y_A/x_A}{y_B/x_B}$$

$\alpha_{AB} > 1$, gdy składnik A jest bardziej lotny niż składnik B.

04 | INTERPRETACJA α

$\alpha \approx 1$ – rozdział staje się trudny (składniki podobnie lotne).

$\alpha > 1$ – możliwe wzbogacenie w parze.

większe α – zazwyczaj łatwiejszy rozdział.

05 | UKŁAD BINARNY PRZY STAŁEJ α

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

x – ułamek molowy bardziej lotnego składnika w cieczy

y – odpowiadający ułamek molowy w parze

07 | KIEDY STOSOWAĆ

Destylację stosuje się do rozdziału mieszanin, w których składniki różnią się lotnością ($\alpha > 1$). Im większa różnica lotności, tym zwykle łatwiejszy i bardziej efektywny rozdział.

09 | SZYBKA MAPA DECYZYJNA

Czy α jest znacznie większe od 1? $\rightarrow$ TAK $\rightarrow$ destylacja może być efektywna.

Czy $\alpha \approx 1$? $\rightarrow$ rozdział staje się trudny; może wymagać wielu stopni lub innej metody separacji.

! Uwaga

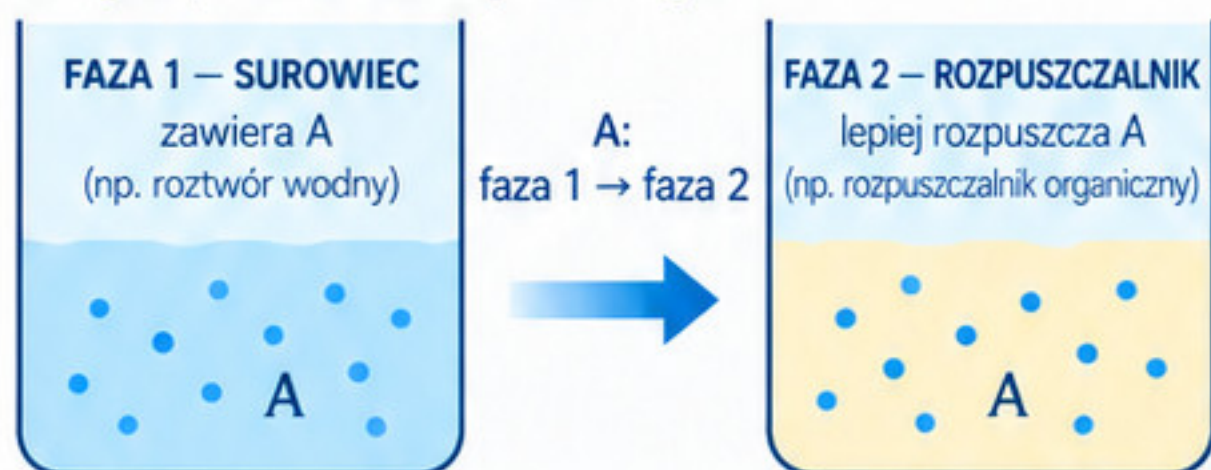
Lotność względna może zależeć od temperatury, ciśnienia, składu mieszaniny i nieidealności roztworu. Stała wartość α jest użytecznym uproszczeniem, ale nie zawsze wystarczającym do dokładnego projektowania kolumny destylacyjnej.

Ekstrakcja: przeniesie składnik do fazy, w której rozpuszcza się lepiej

Podstawy ekstrakcji ciecz–ciecz, współczynnik podziału oraz wpływ stosunku ilości rozpuszczalnika na stopień odzysku składnika.

01 | IDEA EKSTRAKcji

Składnik A rozdziela się między dwiema słabo mieszającymi się fazami ciekłymi. Rozpuszczalnik (faza 2) lepiej rozpuszcza A, dlatego A przechodzi z fazy 1 do fazy 2.



02 | WSPÓŁCZYNNIK PODZIAŁU

$$K_D = \frac{C_{A,E}}{C_{A,R}}$$

$C_{A,E}$ – stężenie składnika A w fazie ekstraktu (E) [mol/m³ lub inne]

$C_{A,R}$ – stężenie składnika A w fazie rafinatu (R) [mol/m³ lub inne]

$K_D > 1$ rozpuszczalnik preferuje A (więcej A w ekstrakcie)

$K_D < 1$ A preferuje fazę rafinatu (więcej A w rafinacie)

03 | WSPÓŁCZYNNIK SELEKTYWNOŚCI

$$\beta_{A/B} = \frac{K_{D,A}}{K_{D,B}}$$

$\beta_{A/B}$ – współczynnik selektywności względem składników A i B.

Im większe $\beta_{A/B}$, tym silniej rozpuszczalnik preferuje A w stosunku do B.

04 | PROSTA EKSTRAKcja JEDNOSTOPNIOWA

Dla jednej ekstrakcji przy założeniu stałego K_D i objętości faz:

$$\frac{n_{A,R}}{n_{A,0}} = \frac{1}{1 + K_D \cdot \frac{V_E}{V_R}}$$

$n_{A,0}$ – początkowa ilość A w fazie surowca

$n_{A,R}$ – ilość A w rafinacie

V_E – objętość fazy ekstraktu

V_R – objętość fazy rafinatu

Wprowadzamy prosty czynnik ekstrakcji:

$$E = K_D \cdot \frac{V_E}{V_R}$$

Wtedy:

$$\frac{n_{A,R}}{n_{A,0}} = \frac{1}{1 + E}$$

05 | FRAKCJA WYEKSTRAHOWANA

Ułamek (frakcja) składnika A przeniesiony do fazy ekstraktu:

$$f_{ext} = 1 - \frac{1}{1 + E} = \frac{E}{1 + E}$$

Im większy E (więcej rozpuszczalnika lub większe K_D), tym większy stopień odzysku składnika A.

06 | MINI-PRZYKŁAD

Dane: $K_D = 4$ $V_E = 50$ mL $V_R = 100$ mL

Obliczenia:

$$E = 4 \cdot \frac{50}{100} = 2$$

$$\frac{n_{A,R}}{n_{A,0}} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3} \quad f_{ext} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 66,7\%$$

$$f_{ext} \approx 66,7\%$$

07 | JEDNA CZY KILKA EKSTRAKcji?

Kilka mniejszych ekstrakcji świeżym rozpuszczalnikiem daje zwykle lepszy efekt niż jedna duża ekstrakcja o tej samej łącznej objętości.

1 duża ekstrakcja



więcej A w rafinacie

3 mniejsze ekstrakcje



mniej A w rafinacie

08 | SCHEMAT I INTERPRETACJA



GÓRNA FAZA – EKSTRAKT
więcej A
(lepiej rozpuszcza A)

DOLNA FAZA – RAFINAT
mniej A

$$K_D = \frac{C_{A,E}}{C_{A,R}}$$

! Uwaga

Współczynnik podziału K_D może zależeć od temperatury, składu faz, pH oraz stopnia jonizacji składnika. W układach z reakcjami chemicznymi (np. kwas–zasada) często należy stosować współczynnik podziału uwzględniający wszystkie formy chemiczne składnika.

05

MODUŁ 05

Termodynamika

Energia określa, co jest możliwe. Równowaga określa, dokąd proces zmierza.

Cel modułu

Zebrać najważniejsze równania termodynamiczne dla gazów, energii, entalpii, równowagi fazowej i równowagi chemicznej.

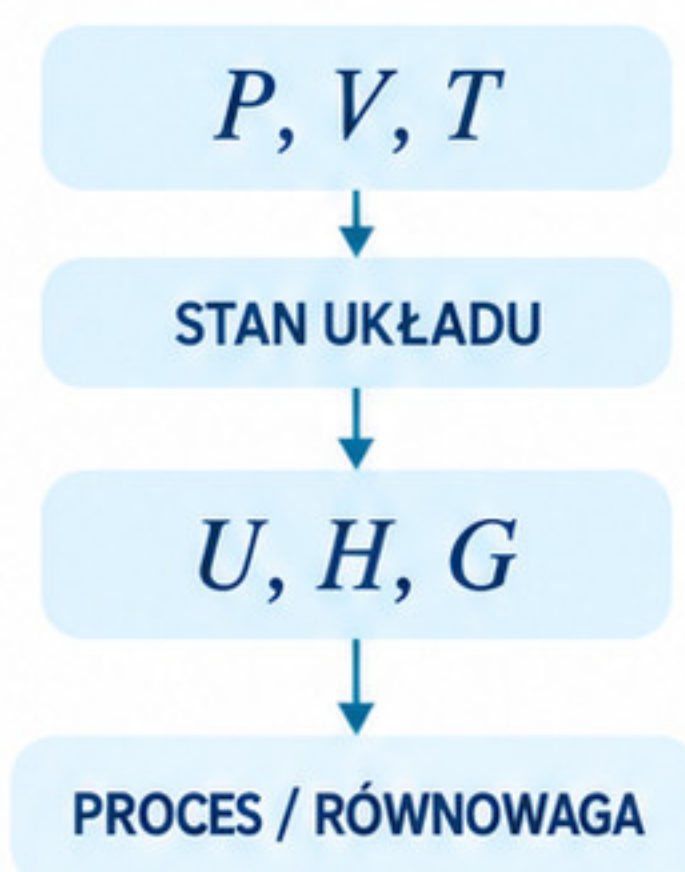
Zakres modułu

 gaz doskonały	PV równania stanu	ΔU pierwsza zasada termodynamiki	U energia wewnętrzna	H entalpia	 ciepło właściwe	 równowaga fazowa
x prawo Raoult'a	H prawo Henry'ego	G energia swobodna Gibbsa	K równowaga chemiczna	 ciśnienie pary	 zależność od temperatury	

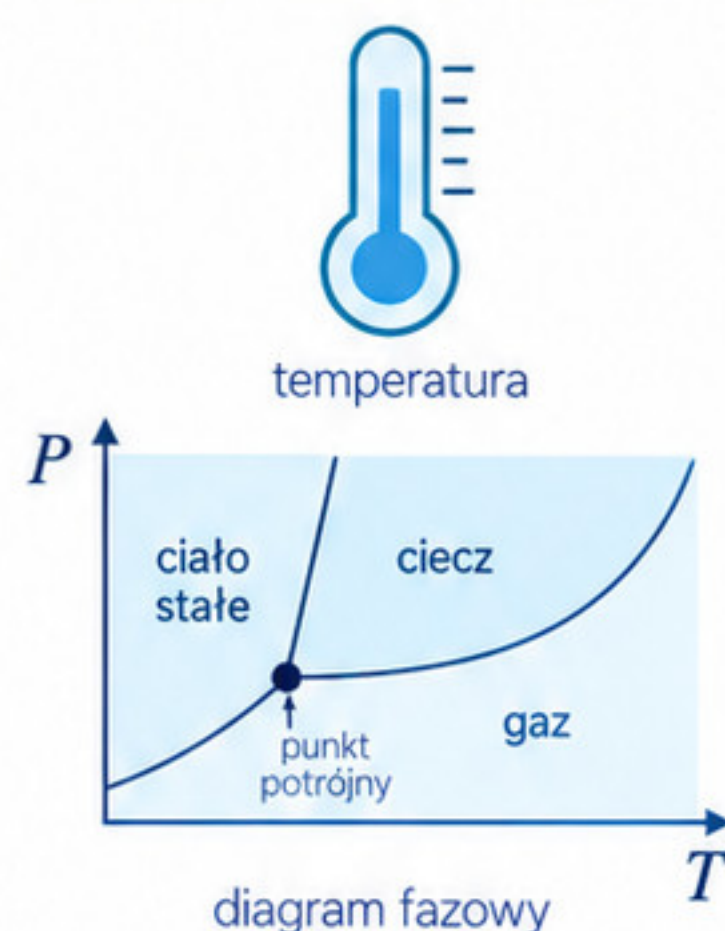
1. Ile energii ma układ?



2. W którym kierunku może zachodzić proces?



3. Gdzie znajduje się stan równowagi?



$$PV = nRT$$

$$H = U + PV$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$



Nie zaczynaj od wzoru. Najpierw ustal: układ, stan, proces i założenia.

Połącz ciśnienie, objętość, temperaturę i liczbę moli

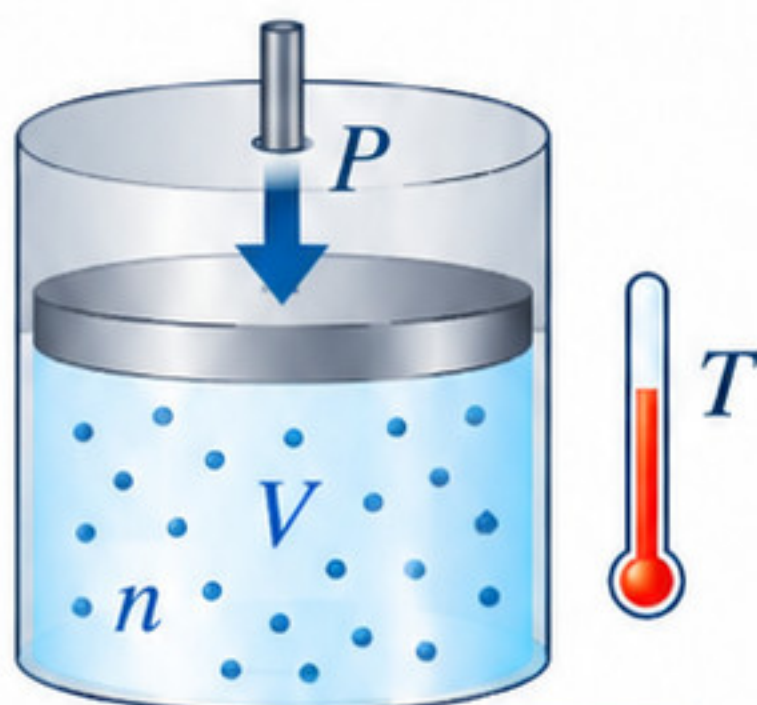
Równanie gazu doskonałego opisuje związek między ciśnieniem, objętością, temperaturą i liczbą moli. W rzeczywistych warunkach należy uwzględnić odchylenia od idealności.

01 RÓWNANIE GAZU DOSKONAŁEGO

WZORY

$$PV = nRT \quad | \quad P \cdot \bar{V} = RT$$

$$\bar{V} = \frac{V}{n} \quad \text{objętość molowa} \quad [\text{m}^3/\text{mol}]$$



$$PV = nRT$$

02 SYMBOLE

P	– ciśnienie absolutne	[Pa]
V	– objętość	[m ³]
n	– liczba moli	[mol]
R	– uniwersalna stała gazowa	[J/(mol·K)]
T	– temperatura bezwzględna	[K]

$$R = 8,314 \text{ J/(mol·K)}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3, \text{ zatem } R = 8,314 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3/(\text{mol} \cdot \text{K}).$$

03 GĘSTOŚĆ GAZU DOSKONAŁEGO

Korzystając z $n = m/M$ oraz $\rho = m/V$, z równania gazu doskonałego otrzymujemy:

$$\rho = \frac{PM}{RT}$$

M – masa molowa [kg/mol]

04 DLA STRUMIENIA GAZU

Dla natężenia przepływu molowego $\dot{n}$ i objętościowego $\dot{V}$:

$$P \cdot \dot{V} = \dot{n}RT \quad | \quad \dot{V} = \frac{\dot{n}RT}{P}$$

05 GAZ RZECZYWISTY – WSPÓŁCZYNNIK ŚCISLIWOŚCI

Dla gazu rzeczywistego wprowadza się współczynnik ściśliwości Z :

$$PV = ZnRT$$

Dla gazu doskonałego $Z = 1$.

06 INTERPRETACJA Z

Współczynnik ściśliwości określa odchylenia od idealności:

- $Z \approx 1$ – gaz zachowuje się prawie idealnie,
- istotne odchylenie Z od 1 – należy zastosować model gazu rzeczywistego (np. równanie van der Waalsa, Soave-Redlicha-Kwonga itp.).

07 KIEDY MODEL IDEALNY DZIAŁA NAJLEPIEJ?

- niższe ciśnienie (zwykle poniżej kilku bar),
- wyższa temperatura,
- daleko od obszaru skraplania (z dala od temperatury nasycenia).

08 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$V = 1,0 \text{ m}^3$$

$$P = 100 \text{ kPa} = 100\,000 \text{ Pa}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

Obliczenia:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{100\,000 \cdot 1}{8,314 \cdot 300} \approx 40,1 \text{ mol}$$

$$n \approx 40,1 \text{ mol}$$



Uwaga

W obliczeniach należy stosować temperaturę w kelwinach oraz ciśnienie absolutne.

Nie należy podstawiać temperatury w °C ani ciśnienia względnego (nadciśnienia) bez uprzedniego przeliczenia.

Energia nie znika — zmienia formę lub przekracza granice układu

Podstawowy bilans energii dla układu zamkniętego oraz zależność między energią wewnętrzną, ciepłem i pracą.

01 | PIERWSZA ZASADA — UKŁAD ZAMKNIĘTY

WZÓR

$$\Delta U = Q - W$$

- ΔU — zmiana energii wewnętrznej układu [J, kJ]
 Q — ciepło doprowadzone do układu [J, kJ]
 W — praca wykonana przez układ [J, kJ]



$$\Delta U = Q - W$$

02 | WAŻNA KONWENCJA ZNAKÓW

- $Q > 0$ — ciepło dopływa do układu (jest dostarczane).
 $W > 0$ — układ wykonuje pracę na otoczeniu.

Zawsze sprawdź przyjętą konwencję znaków przed wykonaniem obliczeń!

03 | PRACA OBJĘTOŚCIOWA

WZÓR OGÓLNY

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P_{ext} dV$$

- P_{ext} — ciśnienie zewnętrzne [Pa]
 V — objętość układu [m³]

DLA STAŁEGO CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO

$$W = P_{ext}(V_2 - V_1)$$

04 | ENTALPIA

WZORY

$$H = U + PV$$

$$h = u + Pv$$

- H, h — entalpia odpowiednio całkowita i właściwa [J, kJ]
 P — ciśnienie [Pa]
 V, v — objętość całkowita i objętość właściwa [m³, m³/kg]

v to objętość właściwa ($v = V/m$).

05 | DLACZEGO ENTALPIA JEST TAK WAŻNA?

W układach przepływowych entalpia wygodnie łączy energię wewnętrzną z pracą przepływową (pracą związaną z wypychaniem płynu przez granice układu). Dzięki temu bilans energii w procesach przepływowych można zapisać prościej, używając entalpii zamiast oddzielnego uwzględniania energii wewnętrznej i pracy przepływowej.

06 | PRZYPADKI SPECJALNE

Proces adiabatyczny

$$Q = 0$$



$$\Delta U = -W$$

Zbiornik sztywny (stała objętość)

$$\Delta V = 0$$



$$W_{PV} = 0$$

jeśli brak innej pracy:

$$\Delta U = Q$$

07 | UKŁAD ZAMKNIĘTY A PRZEPŁYWOWY

Układ zamknięty

Opisujemy stan za pomocą energii wewnętrznej.

$$U$$

Układ otwarty / przepływowy

W bilansie energii uwzględniamy entalpię, energię kinetyczną i potencjalną.

$$h + \frac{v^2}{2} + gz$$

08 | MINI-PRZYKŁAD

- Dane: $Q = 100$ kJ (ciepło doprowadzone do układu)
 $W = 35$ kJ (praca wykonana przez układ)

Obliczenia:

$$\Delta U = Q - W = 100 - 35 = 65 \text{ kJ}$$

$$\Delta U = 65 \text{ kJ}$$



Uwaga

Najczęstszym błędem nie są obliczenia, lecz niespójna konwencja znaków. Przed rozpoczęciem obliczeń jasno określ, co dopływa do układu, co z niego odpływa oraz kto wykonuje pracę na kim.

Jak połączyć skład cieczy ze składem pary?

Porównanie prawa Raoult'a i prawa Henry'ego dla równowagi ciecz-para.

01 WARUNEK RÓWNOWAGI FAZOWEJ

W stanie równowagi fazowej nie ma samorzutnej tendencji do przenoszenia składników między fazami.

Potrzebujemy zależności $x_i \leftrightarrow y_i$ łączącej skład cieczy ze składem pary.

$$x_i \leftrightarrow y_i$$

02 PRAWO RAOULTA

Dla składnika w roztworze idealnym:

$$p_i = x_i P_i^{sat}$$

Ponieważ $p_i = y_i P$, otrzymujemy:

$$y_i P = x_i P_i^{sat} \text{ oraz } K_i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{P_i^{sat}}{P}$$

p_i	– ciśnienie cząstkowe składnika i	[Pa]
x_i	– ułamek molowy w cieczy	[–]
y_i	– ułamek molowy w parze	[–]
P_i^{sat}	– prężność pary składnika i	[Pa]
P	– całkowite ciśnienie	[Pa]
K_i	– współczynnik równowagi (idealnie)	[–]

03 PRAWO DALTONA

Całkowite ciśnienie pary jest sumą ciśnień cząstkowych:

$$P = \sum_{i=1}^n p_i$$

Ciśnienie cząstkowe można zapisać jako:

$$p_i = y_i P$$

04 PRAWO HENRY'EGO

Dla rozcieńczonego składnika w cieczy:

$$p_i = H_i x_i$$

co daje:

$$y_i P = H_i x_i$$

H_i	– stała Henry'ego składnika i	[Pa]
p_i	– ciśnienie cząstkowe składnika i	[Pa]
x_i	– ułamek molowy w cieczy	[–]
y_i	– ułamek molowy w parze	[–]
P	– całkowite ciśnienie	[Pa]

05 RAOULT CZY HENRY?

Wybór prawa zależy od zachowania składnika w roztworze.

Składnik zachowuje się
jak **główny składnik**
w roztworze idealnym?

PRAWO RAOULTA

$$p_i = x_i P_i^{sat}$$

Składnik jest rozcieńczony
lub jest gazem rozpuszczonym
w cieczy?

Najczęściej **PRAWO HENRY'EGO**

$$p_i = H_i x_i$$

06 MINI-PRZYKŁAD — RAOULT

Dane:

$$x_A = 0,40$$

$$P_A^{sat} = 80 \text{ kPa}$$

$$P = 100 \text{ kPa}$$

Wynik:

$$p_A = 32 \text{ kPa}$$

$$y_A = 0,32$$

Obliczenia:

$$p_A = x_A P_A^{sat} = 0,40 \cdot 80 = 32 \text{ kPa}$$

$$y_A = \frac{p_A}{P} = \frac{32}{100} = 0,32$$

07 RAOULT I HENRY — PODSTAWOWE RÓŻNICE

RAOULT

- składnik roztworu (główny komponent)
- idealność cieczy
- używa prężności pary P_i^{sat}



HENRY

- rozcieńczony składnik (małe stężenie)
- stała Henry'ego H_i
- często gazy rozpuszczone w cieczy

! Uwaga

Ani prawo Raoult'a, ani prawo Henry'ego nie mają charakteru uniwersalnego.

Dla roztworów nieidealnych często stosuje się współczynniki aktywności γ_i i zapis rozszerzony:

$$y_i P = x_i \gamma_i P_i^{sat}$$

Entalpia mówi, ile energii niesie strumień

Uporządkowanie zależności między entalpią, pojemnością cieplną i zmianą temperatury oraz pokazanie poziomów dokładności obliczeń.

01 | PODSTAWOWA ZALEŻNOŚĆ

$$\Delta h = c_p(T_2 - T_1) \quad | \quad \Delta h = c_p \Delta T$$

$$\bar{Q} \approx m \Delta h \quad | \quad \dot{Q} = \dot{m} \Delta h$$

Zależność obowiązuje dla zmiany temperatury bez zmiany fazy i przy stałej lub średniej wartości c_p w rozpatrywanym zakresie temperatur.

02 | GDY c_p ZALEŻY OD TEMPERATURY

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$$

W praktyce często stosuje się przybliżenie:

$$\Delta h \approx c_{p,avg}(T_2 - T_1)$$

03 | POJEMNOŚĆ CIEPLNA STRUMIENIA

Pojemność cieplna strumienia (moc cieplna na jednostkę różnicy temperatury):

$$C = \dot{m} c_p \quad [\text{W/K}]$$

Strumień ciepła można zapisać jako:

$$\dot{Q} = C \Delta T$$

04 | CIEPŁO WŁAŚCIWE PRZY STAŁYM CIŚNIENIU

Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu to pochodna entalpii po temperaturze przy stałym ciśnieniu:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$$

05 | DLA GAZU DOSKONAŁEGO

Dla gazu doskonałego entalpia zależy tylko od temperatury: $h = h(T)$.

Stąd postać różniczkowa:

$$dh = c_p dT$$

06 | RELACJA c_p I c_v

Dla gazu doskonałego:

$$c_p - c_v = R_s \quad [\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})]$$

W ujęciu molowym:

$$\bar{C}_p - \bar{C}_v = R \quad [\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$$

07 | MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$\dot{m} = 1,5 \text{ kg/s}$$

$$c_p = 2,5 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Podgrzewanie z 20 °C do 60 °C, zatem $\Delta T = 40 \text{ K}$.

Obliczenia:

$$\dot{Q} = 1,5 \cdot 2,5 \cdot 40 = 150 \text{ kJ/s}$$

$$\dot{Q} = 150 \text{ kW}$$

08 | POZIOMY DOKŁADNOŚCI OBLICZEŃ

Wybierz poziom zgodny z danymi i wymaganą dokładnością.

1

SZYBKO

$$\Delta h = c_p \Delta T$$

Gdy c_p można uznać za stałe w rozpatrywanym zakresie temperatur.



2

DOKŁADNIEJ

$$\Delta h = c_{p,avg} \Delta T$$

Gdy c_p zmienia się z temperaturą, ale dostępna jest jego średnia wartość.



3

PEŁNIE

$$\Delta h = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$$

Gdy znana jest zależność $c_p(T)$ i wymagana jest wysoka dokładność.



Uwaga

Nie należy stosować zależności $c_p \Delta T$ w zakresie, w którym występuje zmiana fazy, bez uwzględnienia entalpii przemiany fazowej. Całkowita zmiana entalpii wynosi:

$$\Delta h_{tot} = \Delta h_{heat,1} + \Delta h_{vap} + \Delta h_{heat,2}$$

Czy reakcja „chce” iść do przodu?

Powiązanie energii swobodnej Gibbsa z kierunkiem samorzutności reakcji i stanem równowagi oraz zależność między ΔG , ilorazem reakcyjnym Q_r i stałą równowagi K .

01 DEFINICJA ENERGII GIBBSA

Energia swobodna Gibbsa:

$$G = H - TS$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

02 INTERPRETACJA ZNAKU

Przy stałej temperaturze T i ciśnieniu p :

$\Delta G < 0 \rightarrow$ reakcja samorzutna w danym kierunku

$\Delta G = 0 \rightarrow$ stan równowagi

$\Delta G > 0 \rightarrow$ reakcja nie jest samorzutna w danym kierunku

03 DLA REAKCJI CHEMICZNEJ

Zmiana energii swobodnej Gibbsa dla reakcji chemicznej w warunkach nierównowagowych:

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q_r$$

$\Delta_r G$ – zmiana energii Gibbsa reakcji w danych warunkach [J/mol]

$\Delta_r G^\circ$ – standardowa zmiana energii Gibbsa reakcji [J/mol]

Q_r – iloraz reakcyjny (obliczany z aktualnych stężeń, ciśnień lub aktywności) [–]

04 W STANIE RÓWNOWAGI

W stanie równowagi $\Delta_r G = 0$ oraz $Q_r = K$, zatem:

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K \quad K = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right)$$

05 INTERPRETACJA K

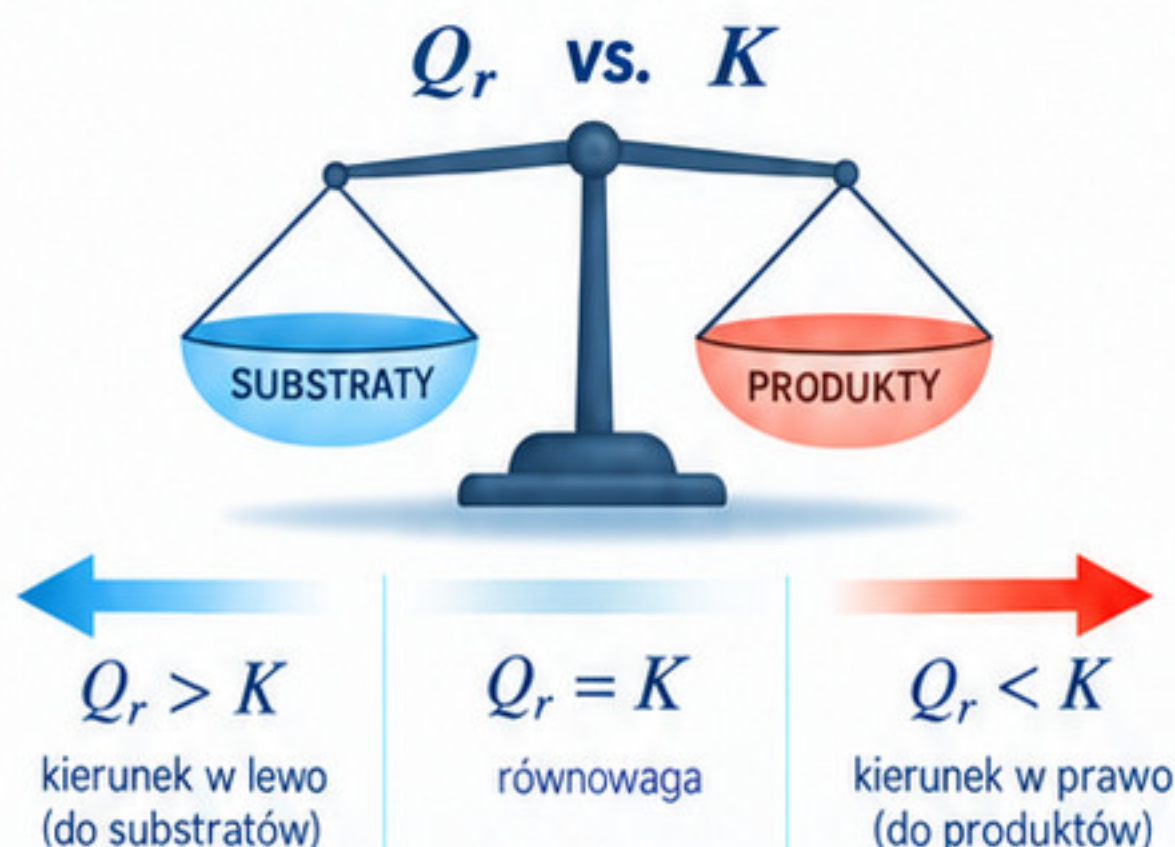
$K \gg 1 \rightarrow$ równowaga silnie przesunięta w stronę produktów (dominują produkty)

$K \ll 1 \rightarrow$ równowaga silnie przesunięta w stronę substratów (dominują substraty)

$K \approx 1 \rightarrow$ w układzie mogą występować porównywalne ilości substratów i produktów

06 MAPA KIERUNKU REAKCJI

Porównanie ilorazu reakcyjnego Q_r ze stałą równowagi K pozwala określić kierunek samorzutnej zmiany układu.



07 MINI-PRZYKŁAD KONCEPCYJNY

Dane: $K = 100$
aktualnie $Q_r = 1$

Wnioski: $Q_r < K$, zatem układ będzie samorzutnie dążył w kierunku produktów, aż osiągnie stan równowagi.

$$Q_r < K \Rightarrow \text{kierunek do produktów}$$

08 BARDZO WAŻNE ROZRÓŻNIENIE

Termodynamika mówi:

- czy reakcja jest korzystna (samorzutna),
- gdzie leży stan równowagi (wartość K).

Kinetyka mówi:

- jak szybko reakcja przebiega,
- jak szybko układ osiąga stan równowagi.

Duża wartość K nie oznacza automatycznie szybkiej reakcji.



Uwaga

Stała równowagi K zależy od temperatury. Katalizator nie zmienia wartości K ani położenia stanu równowagi, lecz jedynie przyspiesza osiągnięcie równowagi.

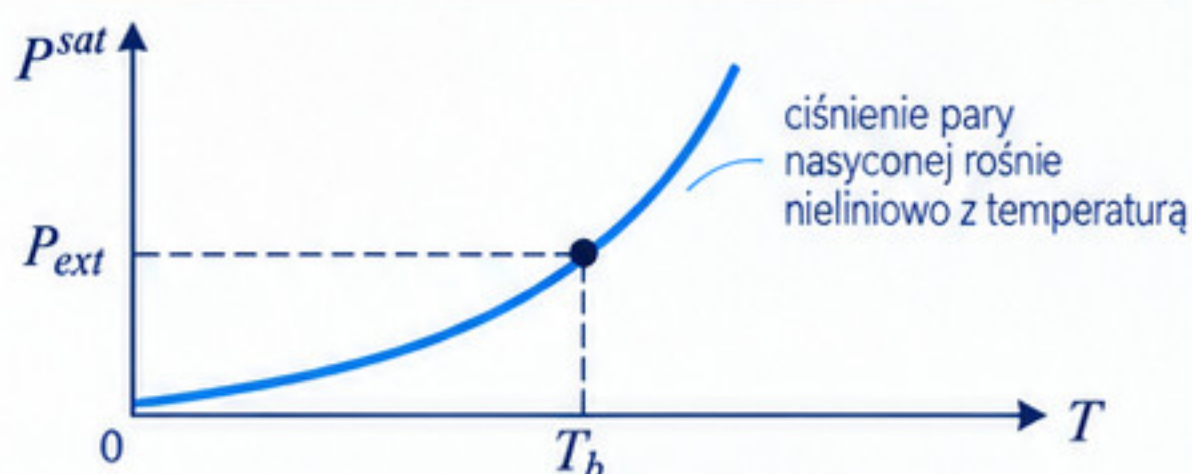
Wyższa temperatura → wyższe ciśnienie pary

Zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury oraz równania Clausiusa–Clapeyrona i Antoine’a.

01 CIŚNIENIE PARY NASYCONEJ

Ciśnienie pary nasyconej P^{sat} to ciśnienie pary w równowadze z cieczą w danej temperaturze.

$$T \uparrow \Rightarrow P^{sat} \uparrow$$



02 WARUNEK WRZENIA

Ciecz wrze, gdy jej ciśnienie pary nasyconej jest równe ciśnieniu zewnętrznemu.

$$P^{sat}(T_b) = P_{ext}$$

Niższe ciśnienie zewnętrzne $\Rightarrow$ niższa temperatura wrzenia.
Wyższe ciśnienie zewnętrzne $\Rightarrow$ wyższa temperatura wrzenia.

03 RÓWNANIE CLAUSIUSA–CLAPEYRONA

Opisuje zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury w oparciu o ciepło parowania.

$$\ln\left(\frac{P_2^{sat}}{P_1^{sat}}\right) = -\frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

04 SYMBOLE

P_1^{sat}	–	ciśnienie pary nasyconej w temperaturze T_1	[Pa]
P_2^{sat}	–	ciśnienie pary nasyconej w temperaturze T_2	[Pa]
T_1	–	temperatura (bezwzględna)	[K]
T_2	–	temperatura (bezwzględna)	[K]
ΔH_{vap}	–	molowe ciepło parowania	[J/mol]
R	–	uniwersalna stała gazowa	[J/(mol·K)]

05 POSTAĆ LINIOWA

Równanie Clausiusa–Clapeyrona można zapisać w postaci liniowej:

$$\ln P^{sat} = -\frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T}\right) + C$$

Wykres $\ln P^{sat}$ w funkcji $1/T$ jest w przybliżeniu liniowy.
Nachylenie prostej wynosi $-\frac{\Delta H_{vap}}{R}$.

06 RÓWNANIE ANTOINE’A

Empiryczne równanie opisujące ciśnienie pary nasyconej w określonym zakresie temperatur.

$$\log_{10} P^{sat} = A - \frac{B}{C + T}$$

A, B, C – stałe Antoine’a, charakterystyczne dla danej substancji i określonego zakresu temperatur.

07 NAJWAŻNIEJSZA ZASADA ANTOINE’A

Nigdy nie należy stosować stałych Antoine’a bez sprawdzenia:

- w jakich jednostkach podane jest ciśnienie,
- w jakich jednostkach podana jest temperatura,
- w jakim zakresie temperatur obowiązują stałe.

09 PRAKTYCZNE POŁĄCZENIA

Zależność ciśnienia pary od temperatury wykorzystuje się m.in. w:



08 MINI-PRZYKŁAD CLAUSIUSA–CLAPEYRONA

Dane:

$$\begin{aligned} P_1^{sat} &= 50 \text{ kPa} \\ T_1 &= 350 \text{ K} \\ T_2 &= 370 \text{ K} \\ \Delta H_{vap} &= 30 \text{ kJ/mol} \end{aligned}$$

Obliczenia:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{P_2}{50}\right) &= -\frac{30000}{8,314}\left(\frac{1}{370} - \frac{1}{350}\right) \\ \ln\left(\frac{P_2}{50}\right) &\approx 0,557 \\ P_2 &\approx 50 e^{0,557} \approx 87,3 \text{ kPa} \end{aligned}$$

$$P_2^{sat} \approx 87 \text{ kPa}$$



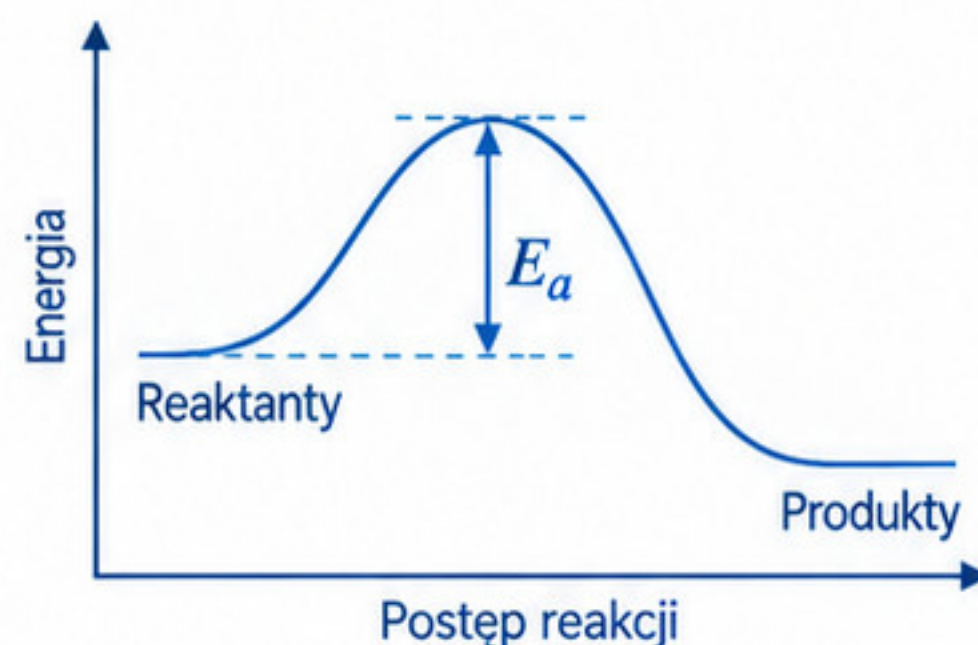
Uwaga

We wszystkich równaniach zawierających $1/T$ temperatura musi być podana w kelwinach (K).
Nigdy nie należy podstawiać temperatury w stopniach Celsjusza bezpośrednio do równania Clausiusa–Clapeyrona.

06

Kinetyka i reaktory chemiczne

Termodynamika mówi, czy reakcja jest możliwa.
Kinetyka mówi, jak szybko zachodzi.



Cel modułu

Połączyć równanie szybkości reakcji z temperaturą, konwersją oraz podstawowymi równaniami projektowymi reaktorów BATCH, CSTR i PFR.

Zakres modułu



szybkość reakcji

n

rzęd reakcji

k

stała szybkości



równanie Arrheniusa



wpływ temperatury

X

konwersja



wydajność



selektywność



reaktor okresowy
BATCH



reaktor zbiornikowy
CSTR



reaktor rurowy
PFR

Ile czasu lub jak duży reaktor jest potrzebny, aby osiągnąć zadaną konwersję?

T

temperatura

k

stała szybkości

$-r_A$

szybkość reakcji

X_A

konwersja

t lub V

czas lub objętość reaktora

Podstawowe wzory

$$-r_A = kC_A^n$$

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

$$X_A = \frac{F_{A0} - F_A}{F_{A0}}$$

Podstawowe typy reaktorów

BATCH

(reaktor okresowy)



Jak długo?

CSTR

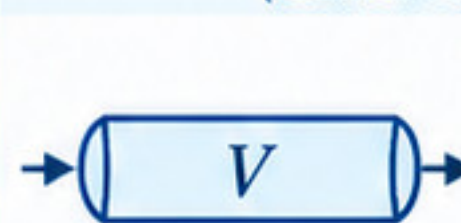
(reaktor zbiornikowy)



Jak duży zbiornik?

PFR

(reaktor rurowy)



Jak długa / duża objętość?

Ważne rozróżnienia



RÓWNOWAGA
mówi o granicy
możliwej konwersji.



KINETYKA
mówi o szybkości
dochodzenia do tej granicy.



REAKTOR
określa, jak kinetyka łączy się
z przepływem i czasem kontaktu.



Najpierw znajdź $-r_A$. Potem wybierz właściwy bilans reaktora.

Temperatura zmienia szybkość reakcji przez stałą k

Pokazać, jak zapisać szybkość reakcji, rozpoznać jej rząd oraz połączyć stałą szybkości z temperaturą za pomocą równania Arrheniusa.

01 SZYBKÓŚĆ ZANIKU REAGENTA

WZÓR

$$-r_A = -\frac{1}{\nu_A} \frac{dC_A}{dt}$$

$-r_A$ – szybkość zaniku (zużycia) reagenta A
[mol/(m³·s)]

02 PRAWO SZYBKÓŚCI

WZORY

$$-r_A = kC_A^n$$

dla wielu reagentów:

$$-r_A = kC_A^\alpha C_B^\beta \quad n = \alpha + \beta$$

UWAGA

- Rząd reakcji należy wyznaczyć z mechanizmu reakcji, doświadczeń lub zweryfikowanego modelu kinetycznego, a nie automatycznie z współczynników stechiometrycznych.

03 NAJCZĘSTSZE PRZYPADKI

rząd zerowy ($n = 0$):

$$-r_A = k$$

rząd pierwszy ($n = 1$):

$$-r_A = kC_A$$

rząd drugi ($n = 2$):

$$-r_A = kC_A^2$$

04 JEDNOSTKI k

Jednostki stałej szybkości zależą od rzędu reakcji:

rząd pierwszy ($n = 1$):

$$[k] = s^{-1}$$

rząd drugi ($n = 2$):

$$[k] = m^3/(mol \cdot s)$$

05 RÓWNANIE ARRHENIUSA

WZÓR

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

SYMBOLE

- A – czynnik przedeksponencjalny [1/s]
- E_a – energia aktywacji [J/mol]
- R – uniwersalna stała gazowa [J/(mol·K)]
- T – temperatura bezwzględna [K]

06 INTERPRETACJA



Gdy temperatura rośnie, wyrażenie $-E_a/(RT)$ staje się mniej ujemne, dlatego stała szybkości k zwykle rośnie, a w konsekwencji rośnie także szybkość reakcji.

07 POSTAĆ LINIOWA ARRHENIUSA

WZÓR

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} \right)$$

UWAGA

- Nachylenie prostej na wykresie $\ln k$ w funkcji $1/T$ wynosi $-E_a/R$.

08 PORÓWNANIE DWÓCH TEMPERATUR

WZÓR

$$\ln \frac{k_2}{k_1} = -\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

09 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$E_a = 50 \text{ kJ/mol}$$

$$T_1 = 300 \text{ K}$$

$$T_2 = 320 \text{ K}$$

Obliczenia:

$$\ln \frac{k_2}{k_1} = -\frac{50\,000}{8,314} \left(\frac{1}{320} - \frac{1}{300} \right)$$

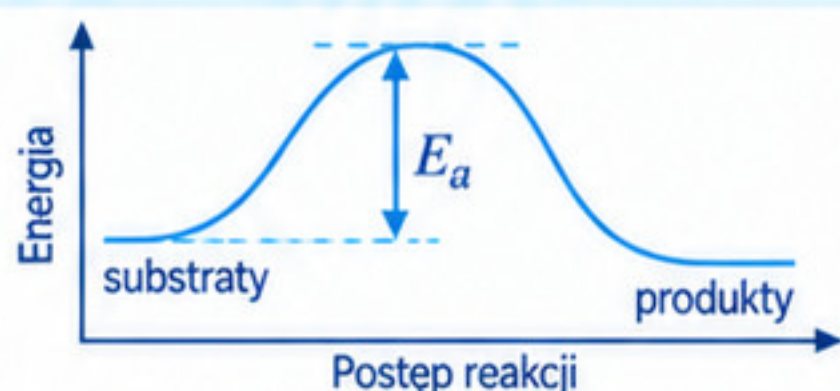
$$\ln \frac{k_2}{k_1} \approx 1,25 \quad \frac{k_2}{k_1} \approx e^{1,25} \approx 3,5$$

$$k_2 \approx 3,5 k_1$$

Wniosek:

Niewielka zmiana temperatury może znacząco zmienić szybkość reakcji.

SCHEMAT ENERGETYCZNY REAKCJI



WPŁYW TEMPERATURY NA SZYBKÓŚĆ



Uwaga

W równaniu Arrheniusa temperaturę należy podawać w kelwinach:

$$T[K] = T[^\circ C] + 273,15$$



Katalizator zmniejsza efektywną barierę energetyczną i może zwiększyć szybkość, ale nie zmienia położenia równowagi.

Nie pytaj tylko „ile przereagowało?” – sprawdź też, co powstało

Rozdzielić trzy często mylone pojęcia: konwersję, wydajność i selektywność.

01 | KONWERSJA REAGENTU A

Ułamek reagenta A, który przereagował.

$$X_A = \frac{F_{A0} - F_A}{F_{A0}}$$

$$F_A = F_{A0}(1 - X_A) \quad 0 \leq X_A \leq 1$$

F_{A0} – molowy strumień (lub ilość) reagenta A na wlocie [mol/s] lub [mol]

F_A – molowy strumień (lub ilość) reagenta A na wylocie [mol/s] lub [mol]

02 | DLA REAKTORA OKRESOWEGO

Dla układu zamkniętego (reaktor okresowy) zamiast strumieni stosujemy ilości moli:

$$X_A = \frac{N_{A0} - N_A}{N_{A0}}$$

N_{A0} – początkowa ilość moli reagenta A [mol]

N_A – aktualna ilość moli reagenta A [mol]

03 | INTERPRETACJA

Jeśli $X_A = 0,80$, to oznacza, że 80% reagenta A zostało zużyte (przereagowało),

ale nie oznacza to, że 80% zamieniło się w pożądany produkt. Część reagenta mogła dać produkty uboczne.

04 | WYDAJNOŚĆ PRODUKTU

Stosunek ilości pożądanego produktu rzeczywiście otrzymanej do maksymalnej ilości możliwej do otrzymania z dostarczonego reagenta.

$$Y_P = \frac{\text{ilość pożądanego produktu rzeczywiście otrzymana}}{\text{maksymalna ilość produktu możliwa z dostarczonego reagenta}}$$

Należy zawsze określić podstawę stechiometryczną, na której obliczana jest wydajność (np. względem reagenta A).

05 | SELEKTYWNOŚĆ

Stosunek ilości wybranego produktu do ilości produktu ubocznego.

$$S_{P/U} = \frac{\text{ilość } P \text{ utworzona}}{\text{ilość } U \text{ utworzona}}$$

Gdy znane są strumienie (lub ilości) obu produktów:

$$S_{P/U} = \frac{F_P - F_{P0}}{F_U - F_{U0}}$$

06 | PRZYKŁADOWA SIĘĆ REAKCJI



KONWERSJA

Odpowiada na pytanie:

Ile A zniknęło?

SELEKTYWNOŚĆ

Odpowiada na pytanie:

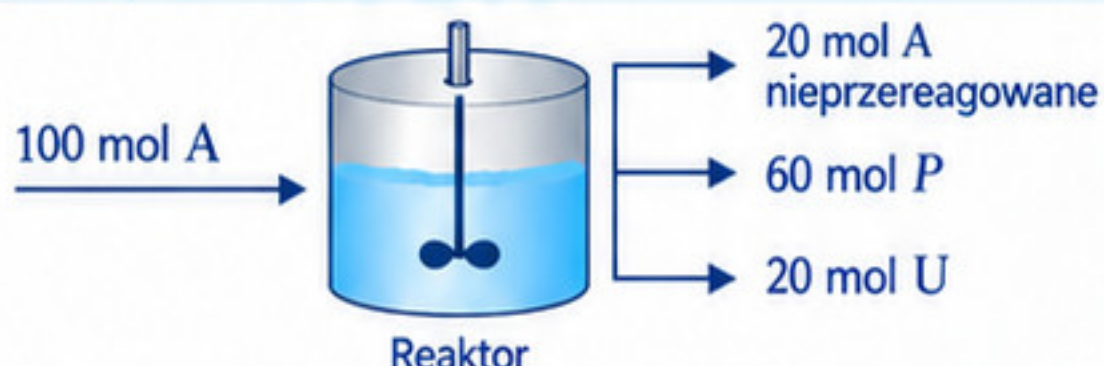
Ile P powstało względem U?

WYDAJNOŚĆ

Odpowiada na pytanie:

Jaka część dostępnego A dała użyteczny produkt?

07 | MINI-PRZYKŁAD



Obliczenia:

$$X_A = \frac{100 - 20}{100} = 0,80 = 80\%$$

$$S_{P/U} = \frac{60}{20} = 3$$

KONWERSJA = 80%

SELEKTYWNOŚĆ P/U = 3

P nie jest równe automatycznie całej konwersji.

08 | SZYBKA KONTROLA

- Czy bilans masy (molowy) się zamyka?
- Czy założono prawidłową stechiometrię?
- Czy $0 \leq X_A \leq 1$?
- Czy jasno określono definicję wydajności (względem jakiego reagenta)?



Uwaga

Wydajność i selektywność mogą być definiowane na kilka sposobów w literaturze. Zawsze zapisz równanie definicyjne przed użyciem wartości liczbowej. Nie stosować symbolu Y ani S bez określenia podstawy (reagenta, produktu, procesu).

BATCH: ile czasu potrzeba do osiągnięcia konwersji?

Pokazać podstawowe równanie projektowe reaktora okresowego oraz jego uproszczenia dla reakcji rzędu zerowego, pierwszego i drugiego przy stałej objętości.

01 | CHARAKTERYSTYKA BATCH

- brak ciągłego dopływu substratów,
- brak ciągłego odpływu produktów,
- skład mieszaniny zmienia się z czasem.

Jak długo?

02 | BILANS MOLI A

Równanie bilansu moli składnika A w reaktorze okresowym:

$$\frac{dN_A}{dt} = r_A V$$

Dla substratu $r_A < 0$, dlatego często pracujemy z dodatnią szybkością reakcji $-r_A$.

03 | W POSTACI KONWERSJI

Liczba moli A wyrażona przez konwersję:

$$N_A = N_{A0}(1 - X_A)$$

Równanie projektowe reaktora okresowego:

$$t = N_{A0} \int_0^{X_A} \frac{dX_A}{(-r_A)V}$$

Jeśli objętość jest stała i $C_A = C_{A0}(1 - X_A)$, równanie można uprościć w zależności od kinetyki reakcji.

04 | REAKCJA RZĘDU ZEROWEGO

Szybkość reakcji:

$$-r_A = k$$

Zmiana stężenia:

$$C_A = C_{A0} - kt$$

Czas do osiągnięcia konwersji X_A :

$$t = \frac{C_{A0}X_A}{k}$$

05 | REAKCJA PIERWSZEGO RZĘDU

Szybkość reakcji:

$$-r_A = kC_A$$

Równanie zintegrowane:

$$\ln \frac{C_{A0}}{C_A} = kt$$

Czas do osiągnięcia konwersji X_A :

$$t = -\frac{1}{k} \ln(1 - X_A)$$

06 | OKRES PÓŁTRWANIA — I RZĄD

Czas, po którym stężenie (lub liczba moli) spada do połowy wartości początkowej:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

07 | REAKCJA DRUGIEGO RZĘDU

Szybkość reakcji:

$$-r_A = kC_A^2$$

Równanie zintegrowane:

$$\frac{1}{C_A} - \frac{1}{C_{A0}} = kt$$

08 | MINI-PRZYKŁAD — PIERWSZY RZĄD

Dane:

$$k = 0,10 \text{ min}^{-1}$$

$$X_A = 0,90$$

Obliczenia:

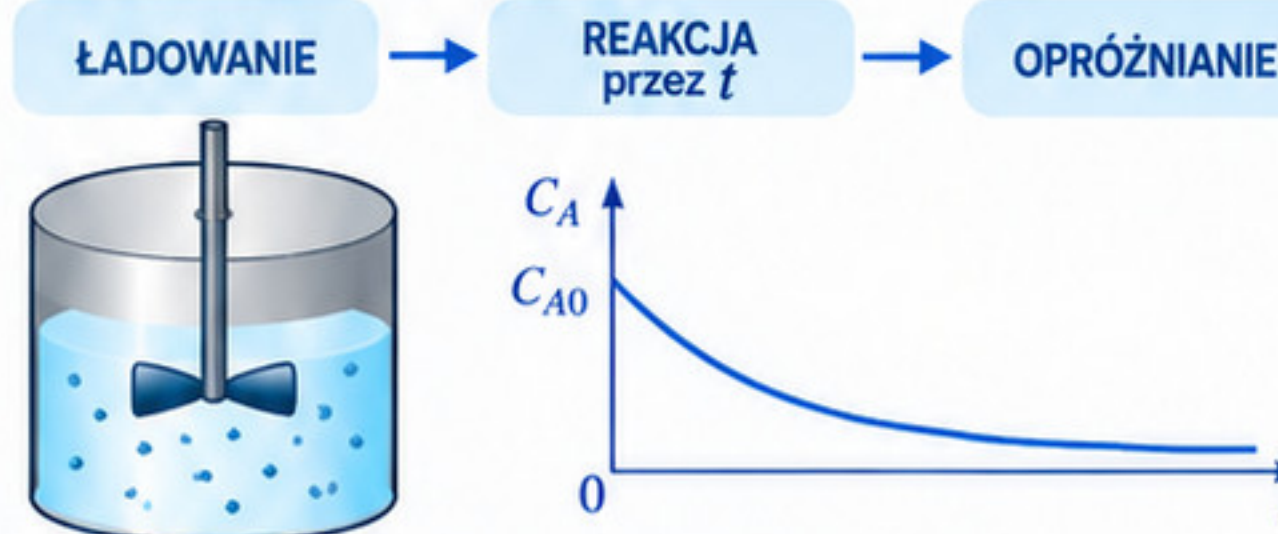
$$t = -\frac{1}{0,10} \ln(1 - 0,90)$$

$$= -10 \ln(0,10)$$

$$\approx 23,0 \text{ min}$$

$$t \approx 23 \text{ min}$$

09 | ELEMENT WIZUALNY



10 | KLUCZOWA ZALEŻNOŚĆ



W BATCH: czas zastępuje wymiar przepływowy.



Uwaga

Powyższe proste równania, wykorzystujące zależność $C_A = C_{A0}(1 - X_A)$, zakładają stałą objętość.

Dla układów gazowych ze znaczącą zmianą całkowitej liczby moli lub objętości, zależność $C_A(X_A)$ może wymagać korekty.

CSTR: cały reaktor ma skład taki jak strumień wyjściowy

Przedstawić równanie projektowe idealnego reaktora zbiornikowego z pełnym wymieszaniem oraz pokazać konsekwencję stałej szybkości reakcji w całej objętości.

01 | CECHA DEFINIUJĄCA CSTR

$$C_{A,reactor} = C_{A,out}$$

W warunkach izotermicznych:

$$T_{reactor} = T_{out}$$

Szybkość reakcji w równaniu projektowym jest obliczana przy warunkach na wylocie (zgodnie ze składem w reaktorze).

02 | BILANS MOLI A – STAN USTALONY

Dla reaktora zbiornikowego w stanie ustalonym:

$$0 = F_{A0} - F_A + r_A V$$

Po wprowadzeniu konwersji:

$$V = \frac{F_{A0} X_A}{-r_A}$$

Szybkość reakcji $-r_A$ jest obliczana przy składzie w reaktorze, tj. przy warunkach na wylocie.

03 | DLA STAŁEGO PRZEPŁYWU OBJĘTOŚCIOWEGO

Dla stałego przepływu objętościowego:

$$F_{A0} = C_{A0} \dot{V} \quad C_A = C_{A0}(1 - X_A)$$

Dla kinetyki pierwszego rzędu:

$$-r_A = kC_A = kC_{A0}(1 - X_A)$$

Czas przestrzenny wynosi:

$$\tau = \frac{V}{\dot{V}} = \frac{X_A}{k(1 - X_A)}$$

04 | CZAS PRZESTRZENNY

$$\tau = \frac{V}{\dot{V}_0}$$

Czas przestrzenny to charakterystyczny czas wynikający z objętości reaktora i objętościowego strumienia zasilania.

05 | MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$k = 0,20 \text{ min}^{-1}$$

wymagana konwersja:

$$X_A = 0,80$$

Obliczenia:

$$\tau = \frac{0,80}{0,20(1 - 0,80)} = 20 \text{ min}$$

Jeśli $\dot{V} = 0,5 \text{ m}^3/\text{min}$, to:

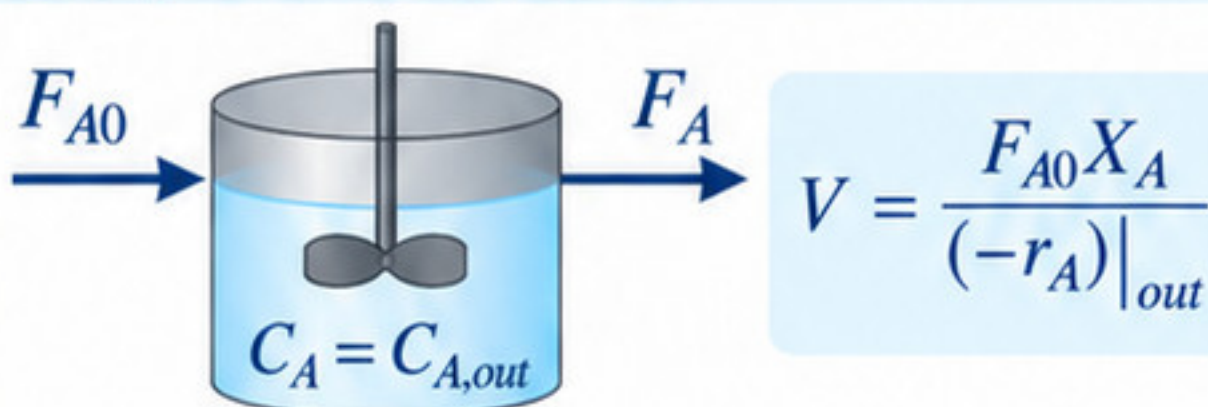
$$V = \tau \dot{V} = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ m}^3$$

Wyniki:

$$\tau = 20 \text{ min}$$

$$V = 10 \text{ m}^3$$

06 | ELEMENT WIZUALNY



07 | INTUICJA

Jeśli szybkość reakcji maleje wraz ze spadkiem C_A , to cały CSTR działa przy stosunkowo niskim stężeniu odpowiadającym warunkom na wylocie. Dlatego dla wielu reakcji o dodatnim rzędzie CSTR wymaga większej objętości niż PFR, aby osiągnąć tę samą konwersję.



Uwaga

Nie należy obliczać $-r_A$ z warunków na wlocie w przypadku CSTR.

W idealnym CSTR warunki wewnątrz reaktora są równe warunkom na wylocie.

PFR: skład zmienia się stopniowo wzdłuż reaktora

Przedstawić równanie projektowe reaktora rurowego i wizualnie porównać jego charakter z CSTR.

01 GŁÓWNA IDEA PFR

- Płyn porusza się wzdłuż reaktora (przepływ tłokowy).
- Skład zmienia się z położeniem w reaktorze.
- Brak mieszania wzdłuż osi (brak powrotnego mieszania).

$$C_A = C_A(V)$$

$$-r_A = -r_A(V)$$

02 RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE

Równanie projektowe PFR:

$$\frac{dF_A}{dV} = r_A$$

Korzystając z $F_A = F_{A0}(1 - X_A)$:

$$dF_A = -F_{A0} dX_A$$

otrzymujemy:

$$dV = \frac{F_{A0}}{-r_A} dX_A$$

Po całkowaniu od 0 do X_A :

$$V = F_{A0} \int_0^{X_A} \frac{dX_A}{-r_A}$$

03 DLA REAKCJI PIERWSZEGO RZĘDU

Dla reakcji pierwszego rzędu oraz stałego przepływu objętościowego ($\rho = \text{const}$):

$$C_A = C_{A0}(1 - X_A)$$

$$-r_A = k C_A$$

Po podstawieniu do równania projektowego i całkowaniu:

$$\tau = -\frac{1}{k} \ln(1 - X_A)$$

gdzie $\tau = \frac{V}{\dot{V}}$ – czas przebywania [min].

04 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$k = 0,20 \text{ min}^{-1}$$

$$X_A = 0,80$$

Obliczenia:

$$\tau = -\frac{1}{0,20} \ln(0,20) \approx 8,05 \text{ min}$$

$$\tau \approx 8,05 \text{ min}$$

Dla tej samej reakcji pierwszego rzędu i konwersji 80%:

CSTR:
 $\tau = 20 \text{ min}$

PFR:
 $\tau \approx 8,05 \text{ min}$

05 DLACZEGO?

Na początku reaktora rurowego stężenie substratu jest wysokie ($C_A \approx C_{A0}$), więc szybkość reakcji jest początkowo większa.

W miarę przepływu płynu wzdłuż reaktora:

$$C_A \downarrow \Rightarrow -r_A \downarrow$$

Oznacza to, że późniejsze fragmenty reaktora pracują przy niższych stężeniach i mniejszych szybkościach reakcji, co wpływa na potrzebną objętość reaktora.

06 ELEMENT WIZUALNY

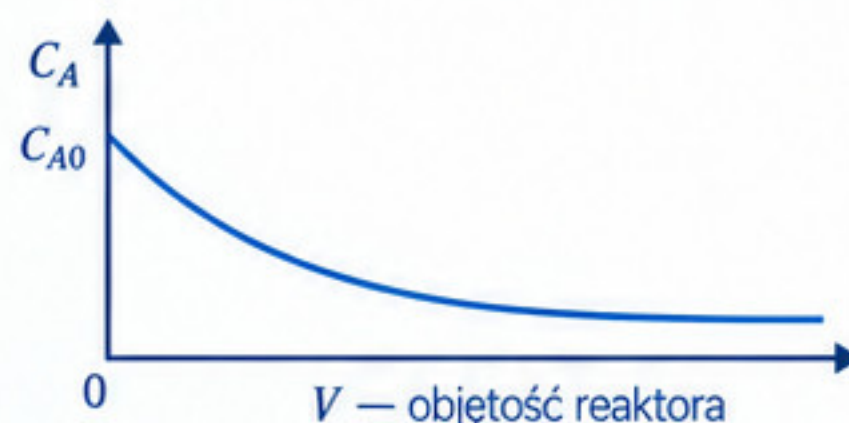
Reaktor rurowy (PFR) – zmiana stężenia

WEJŚCIE

$C_A = C_{A0}$
(wysokie)

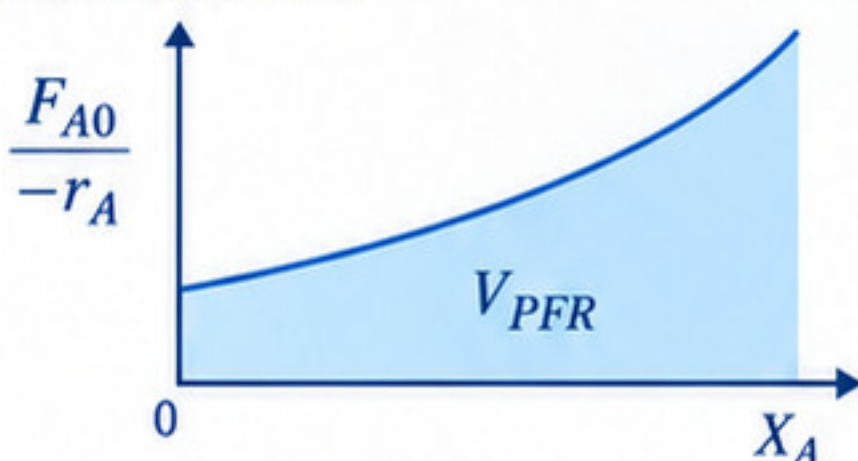
WYJŚCIE

C_A (niskie)



07 LEVENSPIEL — MINI-WIZUALIZACJA

Geometryczna interpretacja równania projektowego PFR.



08 CSTR VS PFR — SZYBKA MAPA

CSTR

(reaktor zbiornikowy)

- idealne mieszanie,
- jeden skład w całym reaktorze (równy wylotowemu),
- szybkość reakcji liczona dla warunków wylotowych,
- prostsze obliczenia (algebraiczne).

PFR

(reaktor rurowy)

- skład zmienia się z położeniem,
- szybkość reakcji zmienia się wzdłuż reaktora,
- konieczne całkowanie równania projektowego,
- zwykle mniejsza objętość niż CSTR (dla typowych kinetyk rzędu dodatniego).



Uwaga

Wniosek, że PFR jest zawsze mniejszy niż CSTR, nie ma charakteru uniwersalnego. Zależy on od kinetyki reakcji. Porównanie przedstawione na tej stronie dotyczy typowego przypadku kinetyk rzędu dodatniego, w którym szybkość reakcji maleje wraz ze spadkiem stężenia substratu.

Operacje jednostkowe i MASTER MAP

Na końcu liczy się nie tylko znajomość wóru — lecz umiejętność wyboru właściwego modelu.



Cel modułu

Uzupełnić mapę o trzy praktyczne obszary operacji jednostkowych oraz zakończyć cały materiał stroną decyzyjną prowadzącą od typu problemu do właściwej grupy równań.

Zakres modułu



sedymencja



prawo Stokesa



prędkość opadania



filtracja



prawo Darcy'ego



filtracja przez placek



mieszanie



liczba mocy



podobieństwo procesowe



końcowa MASTER MAP

Od problemu do rozwiązania — zawsze tą samą drogą.



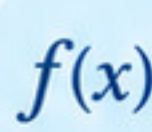
PROBLEM



MODEL



ZAŁOŻENIA



WZÓR



JEDNOSTKI



KONTROLA

1. CZĄSTKA OPADAJĄCA — sedymencja



2. FILTR — filtracja



3. MIESZADŁO — mieszanie



Co robisz, gdy w zadaniu masz 20 danych i nie wiesz, od którego równania zacząć?

Najpierw rozpoznaj zjawisko fizyczne.



STRONA 49 —
MASTER MAP



Dobry inżynier nie zna wszystkich wzorów na pamięć.
Wie, jak znaleźć właściwy model.

Jak szybko cząstka opada w płynie?

Pokazać równowagę sił działających na opadającą cząstkę oraz przedstawić prawo Stokesa jako podstawowy model prędkości sedymentacji w zakresie małej liczby Reynoldsa cząstki.

01 | SIŁY DZIAŁAJĄCE NA CZĄSTKĘ

Na cząstkę kulistą opadającą w płynie działają:

- siła ciężkości (w dół): $F_g = \rho_p V g$
- siła wyporu (w górę): $F_b = \rho_f V g$
- siła oporu (w górę): $F_D = 6\pi\mu r v_t$

Przy prędkości granicznej (ustalonej):

$$F_g - F_b - F_D = 0$$

02 | PRAWO STOKESA

$$v_t = \frac{(\rho_p - \rho_f) g d_p^2}{18 \mu}$$

- v_t – prędkość sedymentacji (prędkość graniczna) [m/s]
- ρ_p – gęstość cząstki [kg/m³]
- ρ_f – gęstość płynu [kg/m³]
- d_p – średnica cząstki (kulistej) [m]
- μ – lepkość dynamiczna płynu [Pa·s]

03 | WARUNEK STOSOWALNOŚCI

Liczba Reynoldsa cząstki (oparta na prędkości granicznej):

$$Re_p = \frac{\rho_f v_t d_p}{\mu}$$

Prawo Stokesa jest odpowiednie zazwyczaj dla:

$$Re_p \lesssim 1$$

04 | INTERPRETACJA

Z prawa Stokesa wynika, że prędkość sedymentacji:

$$v_t \propto d_p^2$$

większa cząstka
→ szybsze opadanie

$$v_t \propto (\rho_p - \rho_f)$$

większa różnica
gęstości
→ szybsze opadanie

$$v_t \propto \frac{1}{\mu}$$

większa lepkość
→ wolniejsze
opadanie

05 | CO PRZYSPIESZA OPADANIE?

Większa cząstka

$$d_p \uparrow \rightarrow v_t \uparrow$$

Większa różnica gęstości

$$(\rho_p - \rho_f) \uparrow \rightarrow v_t \uparrow$$

Mniejsza lepkość

$$\mu \downarrow \rightarrow v_t \uparrow$$

06 | MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$\begin{aligned} \rho_p &= 2500 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_f &= 1000 \text{ kg/m}^3 \\ d_p &= 50 \mu\text{m} = 50 \times 10^{-6} \text{ m} \\ \mu &= 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} \end{aligned}$$

Obliczenia:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{(2500 - 1000) \cdot 9,81 \cdot (50 \times 10^{-6})^2}{18 \cdot 1,0 \times 10^{-3}} \\ v_t &\approx 2,0 \times 10^{-3} \text{ m/s} \\ v_t &\approx \mathbf{2,0 \text{ mm/s}} \end{aligned}$$

07 | KONTROLA WARUNKU STOKESA

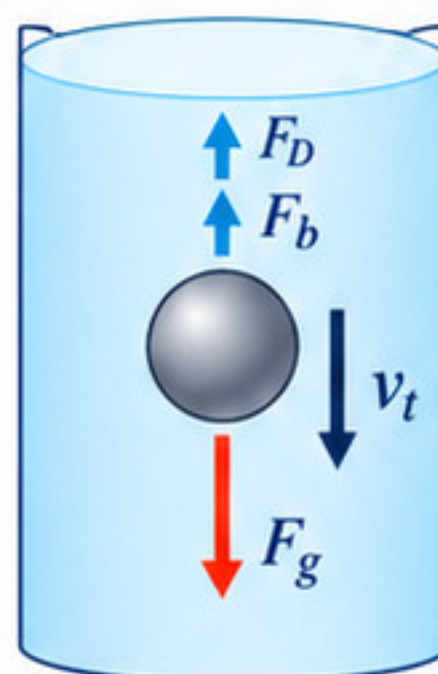
$$Re_p = \frac{1000 \cdot 0,0020 \cdot 50 \times 10^{-6}}{10^{-3}} \approx 0,10$$

Założenie Stokesa jest rozsądne.

09 | MAPA DECYZYJNA



08 | ELEMENT WIZUALNY



- F_g – siła ciężkości (w dół)
- F_b – siła wyporu (w górę)
- F_D – siła oporu (w górę)
- v_t – prędkość sedymentacji (w dół)



Uwaga

Nie należy stosować prawa Stokesa bezkrytycznie do dużych cząstek, przy wysokich prędkościach, dla bardzo niesferycznych cząstek ani w zawiesinach o dużym stężeniu, gdzie występują oddziaływania międzycząstkowe.

Filtracja: przepływ przez opór przegrody i osadu

Pokazać podstawowe równanie przepływu przez porowaty opór oraz klasyczny model filtracji plackowej przy stałym ciśnieniu.

01 | PODSTAWOWA IDEA

- Filtrat musi pokonać opór przegrody (medium filtracyjne) oraz rosnącego placka filtracyjnego.
- Wraz ze wzrostem ilości osadu opór rośnie, dlatego szybkość filtracji może maleć w czasie.

02 | PRAWO DARCY'EGO — FORMA OGÓLNA

$$\dot{V} = \frac{k_p A}{\mu L} \Delta P$$

k_p – przepuszczalność porowata [m²]
 A – pole powierzchni przepływu [m²]
 μ – lepkość dynamiczna [Pa·s]
 L – grubość porowatej przegrody [m]
 ΔP – spadek ciśnienia [Pa]

03 | ZAPIS OPOROWY

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A \Delta P}{\mu (R_m + R_c)}$$

R_m – opór przegrody (medium filtracyjnego) [m⁻¹]

R_c – opór placka filtracyjnego [m⁻¹]

04 | OPÓR PLACKA

$$R_c = \frac{\alpha m_c}{A}$$

Jeśli masa placka rośnie proporcjonalnie do objętości filtratu:

$$m_c = cV \rightarrow R_c = \frac{\alpha c V}{A}$$

α – opór właściwy placka [m/kg]

c – stężenie masowe suchej fazy w osadzie [kg/m³]

05 | FILTRACJA PRZY STAŁYM ΔP

Po scałkowaniu równania dla stałego spadku ciśnienia:

$$t = \frac{\mu \alpha c}{2A^2 \Delta P} V^2 + \frac{\mu R_m}{A \Delta P} V$$

06 | POSTAĆ LINIOWA

Dzieląc równanie przez V , otrzymujemy:

$$\frac{t}{V} = \frac{\mu \alpha c}{2A^2 \Delta P} V + \frac{\mu R_m}{A \Delta P}$$

Wykres t/V w funkcji V ma postać liniową i może być wykorzystany do wyznaczenia parametrów filtracji.

07 | INTERPRETACJA

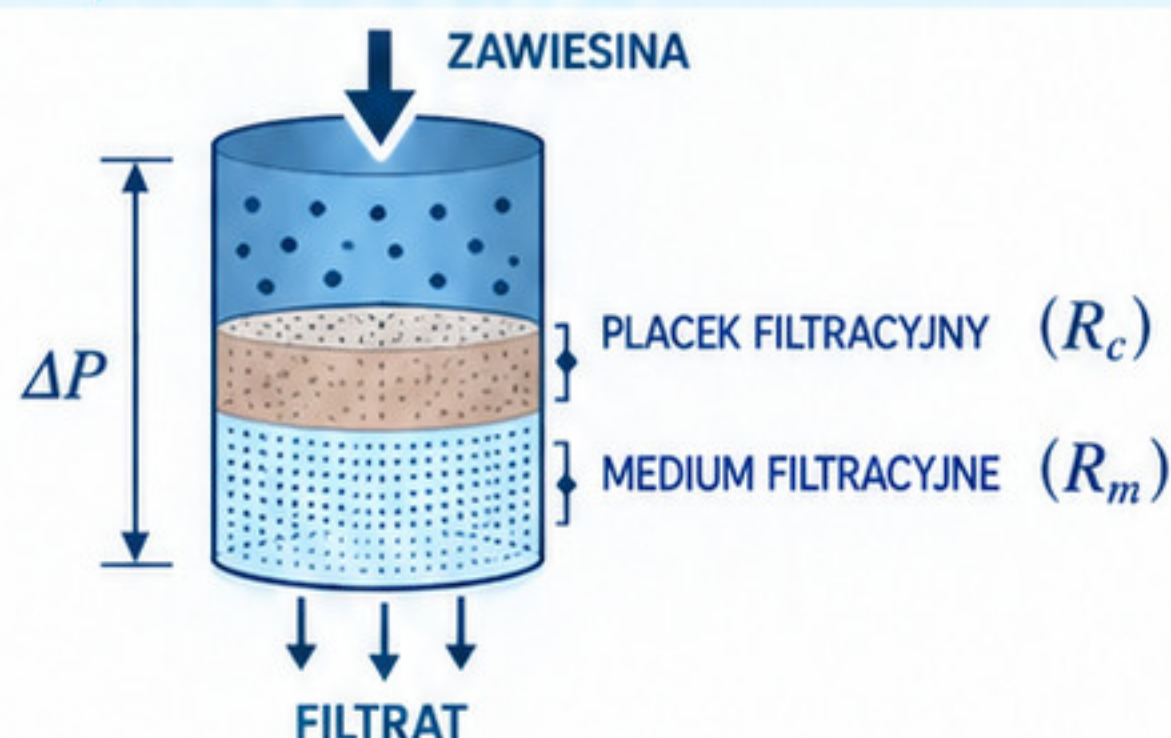
Na początku może dominować opór przegrody R_m . Wraz ze wzrostem placka rośnie R_c , co powoduje spadek szybkości filtracji dV/dt przy stałym ΔP .

$$V \uparrow \rightarrow m_c \uparrow \rightarrow R_c \uparrow \rightarrow \frac{dV}{dt} \downarrow$$

09 | CO ZWIĘKSZA SZYBKOŚĆ FILTRACJI?

- Większe pole powierzchni filtracji A .
- Większy spadek ciśnienia ΔP .
- Mniejsza lepkość cieczy μ .
- Mniejszy opór przegrody R_m .
- Mniejszy opór placka R_c (np. bardziej przepuszczalny osad).

08 | ELEMENT WIZUALNY



Uwaga

Plack filtracyjny może być ściśliwy, dlatego opór właściwy α może zależeć od ciśnienia. Nie należy traktować α jako uniwersalnej stałej dla wszystkich warunków.

Jak połączyć prędkość obrotową mieszadła z poborem mocy?

Przedstawić podstawowe liczby bezwymiarowe stosowane w mieszaniu oraz pokazać, jak liczba mocy łączy geometrię, prędkość obrotową, właściwości płynu i zapotrzebowanie energetyczne.

01 LICZBA REYNOLDSA MIESZANIA

$$Re_M = \frac{\rho N D^2}{\mu}$$

Symbole

ρ	– gęstość płynu	[kg/m ³]
N	– prędkość obrotowa	[s ⁻¹]
D	– średnica mieszadła	[m]
μ	– lepkość dynamiczna	[Pa·s]

02 INTERPRETACJA

- Mała wartość Re_M ($Re_M \ll 1$) – dominują siły lepkości (reżim laminarny).
- Duża wartość Re_M ($Re_M \gg 1$) – dominują siły bezwładności, rozwinięta turbulencja (reżim turbulentny).

03 LICZBA MOCY

$$N_P = \frac{P}{\rho N^3 D^5}$$

Skąd:

$$P = N_P \rho N^3 D^5$$

Symbole

P	– moc mieszania	[W]
N_P	– liczba mocy	[-]

04 DLACZEGO TEN WZÓR JEST WAŻNY?

$$P \propto N^3$$

$$P \propto D^5$$

Zapotrzebowanie mocy bardzo silnie zależy od prędkości obrotowej mieszadła i jego wymiarów.

05 MINI-PRZYKŁAD

Dane:

$$\begin{aligned} N_P &= 5 \\ \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3 \\ N &= 2 \text{ s}^{-1} \\ D &= 0,30 \text{ m} \end{aligned}$$

Obliczenia:

$$\begin{aligned} 0,30^5 &= 0,00243 \\ P &= 5 \cdot 1000 \cdot 2^3 \cdot 0,30^5 \\ &\approx 97,2 \text{ W} \end{aligned}$$

$$P \approx 97 \text{ W}$$

06 CO SIĘ STANIE, GDY PODWOISZ N ?

Przy stałych N_P , ρ i D , jeśli $N_2 = 2N_1$, to:

$$\frac{P_2}{P_1} = 2^3 = 8$$

$$P_2 = 8P_1$$

07 PODOBIENSTWO PROCESOWE – SCALE-UP

W skali większej stosuje się różne kryteria podobieństwa:

Stała moc na jednostkę objętości:

$$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2}$$

Stała prędkość na końcu łopatk (tip speed):

$$u_{tip} = \pi D N$$

Czasem zachowuje się odpowiednią liczbę bezwymiarową (np. Re_M).

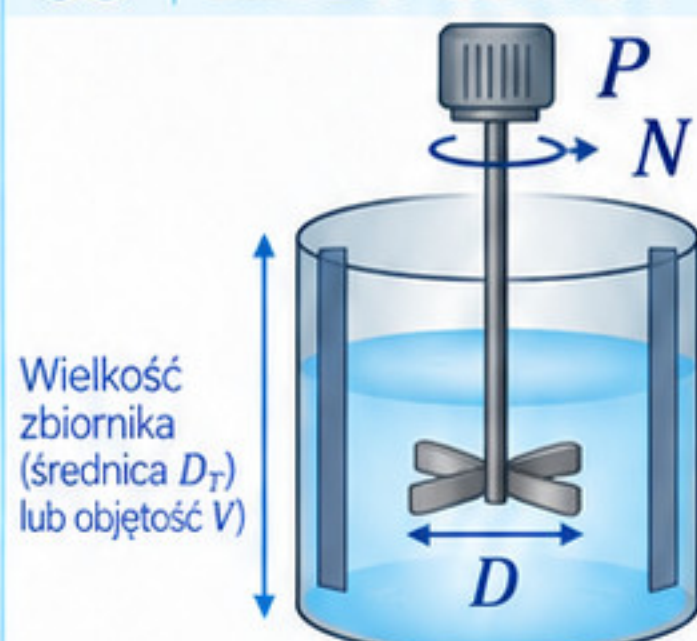
08 WAŻNE

Nie zawsze można jednocześnie zachować:

- ten sam Re_M ,
- to samo P/V ,
- tę samą prędkość na końcu łopatk,
- te same charakterystyki transportu (np. mieszania).

Skalowanie wymaga wyboru kryterium odpowiedniego dla procesu.

09 ELEMENT WIZUALNY



$$P = N_P \rho N^3 D^5$$

10 MINI-MAPA



Uwaga

Liczba mocy N_P zależy od typu mieszadła, geometrii zbiornika, przegrod (baffle) oraz Re_M . Nie należy przenosić wartości N_P z innej geometrii bez sprawdzenia.

MASTER MAP – od treści zadania do właściwego równania

Ta strona ma być najbardziej użyteczną stroną całego materiału do szybkich powtórek.

CO MUSISZ OBLICZYĆ?

1	2	3	4	5	6	7
MASA / SKŁAD / STRUMIEŃ	PRZEPŁYW / CIŚNIENIE / POMPA	CIEPŁO / TEMPERATURA	TRANSPORT MASY / ROZDZIELANIE	TERMODYNAMIKA / RÓWNOWAGA	REAKCJA / REAKTOR	OPERACJE JEDNOSTKOWE
Podstawowe zależności	Równanie ciągłości	Ogrzewanie / chłodzenie	Prawo Ficka	Równanie gazu doskonałego	Prawo szybkości	Sedymentacja (sprawdź Re_p)
$n = \frac{m}{M}$	$\dot{V} = Av$	$Q = mc_p \Delta T$	$J_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$	$PV = nRT$	$-r_A = kC_A^n$	$v_t = \frac{(\rho_p - \rho_f)gd_p^2}{18\mu}$
$\rho = \frac{m}{V}$	$A_1 v_1 = A_2 v_2$	Przemiana fazowa	Współczynnik przenikania masy	Równanie gazu rzeczywistego	Równanie Arrheniusa	Filtracja
$\dot{m} = \rho \dot{V}$	Bernoulli (forma właściwa)	$Q = m\Delta h_{phase}$	$N_A = k_c \Delta C_A$	$PV = ZnRT$	$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$	$\frac{dV}{dt} = \frac{A\Delta P}{\mu(R_m + R_c)}$
$x_i = \frac{n_i}{n_{tot}}$	$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$ (dla cieczy nieściśliwej, bez strat)	Przewodzenie ciepła	Absorpcja gaz-ciecz	I zasada termodynamiki	Stopień konwersji	Mieszanie
$w_i = \frac{m_i}{m_{tot}}$	Liczba Reynoldsa	$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx}$	$y \leftrightarrow y^*$ porównaj stężenie z równowagowym	Enthalpia	$X_A = \frac{F_{A0} - F_A}{F_{A0}}$	$Re_M = \frac{\rho ND^2}{\mu}$
Bilans ogólny	$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$	Konwekcja	Destylacja	Prawo Raoult'a	Reaktor okresowy (BATCH)	$P = N_p \rho N^3 D^5$
AKUMULACJA = WEJŚCIE - WYJŚCIE + POWSTAWANIE - ZUŻYCIE	Straty ciśnienia (Darcy-Weisbach)	$\dot{Q} = hA\Delta T$	$\alpha_{AB} = \frac{K_A}{K_B}$	Prawo Henry'ego	$t = N_{A0} \int \frac{dX_A}{(-r_A)V}$	
Stan ustalony (bez reakcji)	$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$	Wymiennik ciepła	Ekstrakcja (ciecz-ciecz)	Równowaga reakcji	Reaktor zbiornikowy (CSTR)	
$\sum \dot{m}_{in} = \sum \dot{m}_{out}$	Moc pompy	$\dot{Q} = UA\Delta T_{lm}$	$K_D = \frac{C_{A,E}}{C_{A,R}}$	$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K$	Reaktor rurowy (PFR)	
	$P_{in} = \frac{\rho g \dot{V} H_p}{\eta_p}$	Metoda $\epsilon - NTU$		Równanie Clausiusa-Clapeyrona lub Antoine'a	$V = F_{A0} \int_0^{X_A} \frac{dX_A}{(-r_A)}$	

ZANIM POLICZYSZ, SPRAWDŹ:

1 Czy układ jest w stanie ustalonym czy nieustalonym?	2 Czy zachodzi reakcja chemiczna?	3 Czy właściwości są stałe?	4 Czy model idealny jest uzasadniony?	5 Czy jednostki są zgodne?	6 Czy wynik ma sens fizyczny?
Jeśli zakładasz $\frac{d}{dt} = 0$, uzasadnij to.	Jeśli tak, uwzględnij kinetykę i odpowiedni model reaktora.	Np. ρ , μ , c_p , k . Jeśli nie, uwzględnij ich zależność od temperatury, ciśnienia, składu.	Np. gaz doskonały, roztwór idealny, idealne mieszanie, brak strat itp.	Stosuj układ SI: kg, m, s, mol, K, Pa, J.	Sprawdź znak, rząd wielkości, ograniczenia fizyczne i reakcję na zmianę parametrów.

! CZERWONE FLAGI — JEŚLI TO WIDZISZ, ZATRZYMAJ SIĘ

- $X > 1$ lub $X < 0$.
- Ułamki molowe nie sumują się do 1.
- Temperatura w °C użyta w $1/T$.
- Ciśnienie manometryczne użyte tam, gdzie potrzebne jest absolutne.
- Mylenie m z $\dot{m}$.
- Użycie prawa Stokesa bez sprawdzenia Re_p .
- Użycie idealnego Bernoulliego mimo dużych strat.
- Użycie $Q = mc_p \Delta T$ w zakresie przemiany fazowej.
- Zastosowanie współczynnika bez sprawdzenia jego definicji i jednostek.

Mapa obejmuje:

- ✓ bilanse,
- ✓ przepływ płynów,
- ✓ wymianę ciepła,
- ✓ transport masy i separacje.
- ✓ termodynamikę,
- ✓ kinetykę i reaktory,
- ✓ wybrane operacje jednostkowe.



Nie musisz pamiętać każdego wzoru. Musisz rozumieć, jakie zjawisko opisujesz, jakie przyjmujesz założenia i czego szukasz.

Problem → model → założenia → równanie → jednostki → wynik → kontrola.